

Алгебраические штучки–1. 8 июня

Часть 1.

Упражнение 1. Докажите, что если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_{2022}}{b_{2022}}$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2022a_{2022}}{b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + 2022b_{2022}}.$$

Упражнение 2. Про числа a, b, c известно, что $7a^2 - 143a = 7b^2 - 143b = 7c^2 - 143c$. Докажите, что среди них есть равные.

1. Докажите, что если

$$\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} \neq 0, \text{ то } \frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}.$$

2. Решите в действительных числах уравнение $\sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt[3]{3 - x^3 - y^3}$.

3. Последовательность x_n удовлетворяет следующим условиям: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а для каждого $n \geq 3$ выполнено равенство

$$x_{n-2}(x_{n+1} + x_{n-1}) = x_n(x_n + x_{n-1}).$$

Верно ли, что каждое из чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2020}$ целое?

Часть 2.

Упражнение 3. В последовательности первый член равен 1, а каждый следующий равен сумме всех предыдущих. Чему равен 1000-й член?

4. По целому числу a построим последовательность $a_1 = a$, $a_2 = 1 + a_1$, $a_3 = 1 + a_1a_2$, $a_4 = 1 + a_1a_2a_3$, \dots . Докажите, что разности ее соседних членов $a_{n+1} - a_n$ — квадраты целых чисел.

5. Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 3$, $x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$. Найдите x_{2019} .

6. Пусть a_1, a_2, \dots бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $a_1 = 2021$ и $a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 1$ для всех натуральных n . Докажите, что при $n > 2$ число a_n можно разложить в произведение $2n$ сомножителей, где каждый больше 1. Сомножители не обязательно различны.

Алгебраические штучки–1. 8 июня

Часть 1.

Упражнение 1. Докажите, что если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_{2022}}{b_{2022}}$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2022a_{2022}}{b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + 2022b_{2022}}.$$

Упражнение 2. Про числа a, b, c известно, что $7a^2 - 143a = 7b^2 - 143b = 7c^2 - 143c$. Докажите, что среди них есть равные.

1. Докажите, что если

$$\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} \neq 0, \text{ то } \frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}.$$

2. Решите в действительных числах уравнение $\sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt[3]{3 - x^3 - y^3}$.

3. Последовательность x_n удовлетворяет следующим условиям: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а для каждого $n \geq 3$ выполнено равенство

$$x_{n-2}(x_{n+1} + x_{n-1}) = x_n(x_n + x_{n-1}).$$

Верно ли, что каждое из чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2020}$ целое?

Часть 2.

Упражнение 3. В последовательности первый член равен 1, а каждый следующий равен сумме всех предыдущих. Чему равен 1000-й член?

4. По целому числу a построим последовательность $a_1 = a$, $a_2 = 1 + a_1$, $a_3 = 1 + a_1a_2$, $a_4 = 1 + a_1a_2a_3$, \dots . Докажите, что разности ее соседних членов $a_{n+1} - a_n$ — квадраты целых чисел.

5. Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 3$, $x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$. Найдите x_{2019} .

6. Пусть a_1, a_2, \dots бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $a_1 = 2021$ и $a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 1$ для всех натуральных n . Докажите, что при $n > 2$ число a_n можно разложить в произведение $2n$ сомножителей, где каждый больше 1. Сомножители не обязательно различны.