Индукция: усиление утверждения. 9 июня

1. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют такие целые числа a_n и b_n, что

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{a_n + b_n\sqrt{5}}{2}.$$

2. Докажите, что для каждого $n \geqslant 3$ число $n!$ может быть представленно как сумма n своих различных делителей.

3. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа 1, 2, …, n так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел.

4. На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

5. Докажите, что для каждого натурального числа k существует такое число N_k, что все числа $n > N_k$ могут быть представлены в виде $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, причём $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ и $a_{i+1} \,\vdots\, a_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2–Э3

Индукция: усиление утверждения. 9 июня

1. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют такие целые числа a_n и b_n, что

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{a_n + b_n\sqrt{5}}{2}.$$

2. Докажите, что для каждого $n \geqslant 3$ число $n!$ может быть представленно как сумма n своих различных делителей.

3. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа 1, 2, …, n так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел.

4. На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

5. Докажите, что для каждого натурального числа k существует такое число N_k, что все числа $n > N_k$ могут быть представлены в виде $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, причём $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ и $a_{i+1} \,\vdots\, a_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$.