

Составные числа–1. 11 июня

1. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида а) $10^n + 3$; б) $(4^n + 1)^2 + 4$.
2. Докажите, что для бесконечно многих n число $n^n + (n + 1)^{n+1}$ составное.
3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n для которых каждое из чисел $2^n + 3^n - 4$ и $2^n + 3^n - 6$ составное.
4. Докажите, что для *каждого* натурального $n > 1$ следующие числа составные: а) $11 \cdot 14^n + 1$; б) $19 \cdot 8^n + 17$; в) $\frac{1}{3} \cdot (2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)$.
5. Даны натуральные числа a, b, c, d . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , для которых число $a^n + b^n + c^n + d^n$ — составное.
6. Пусть m — натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m, 2^n - (m - 1), \dots, 2^n + m$ — составное.
7. Дано натуральное число a . Докажите, что найдётся бесконечно много таких натуральных чисел b , что числа a и b являются взаимно простыми, а число $a + b^{171}$ — составное.
8. а) Найдите хотя бы одно натуральное n , для которого число $n^2 + n + 41$ — составное и не делится на 41.
б) Пусть $P(x)$ — произвольный квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n , для которого $P(n)$ — составное. *Если вы знаете, что у произвольного многочлена не может быть много корней, можете решить задачу для произвольного многочлена.*

Составные числа–1. 11 июня

1. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида а) $10^n + 3$; б) $(4^n + 1)^2 + 4$.
2. Докажите, что для бесконечно многих n число $n^n + (n + 1)^{n+1}$ составное.
3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n для которых каждое из чисел $2^n + 3^n - 4$ и $2^n + 3^n - 6$ составное.
4. Докажите, что для *каждого* натурального $n > 1$ следующие числа составные: а) $11 \cdot 14^n + 1$; б) $19 \cdot 8^n + 17$; в) $\frac{1}{3} \cdot (2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)$.
5. Даны натуральные числа a, b, c, d . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , для которых число $a^n + b^n + c^n + d^n$ — составное.
6. Пусть m — натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m, 2^n - (m - 1), \dots, 2^n + m$ — составное.
7. Дано натуральное число a . Докажите, что найдётся бесконечно много таких натуральных чисел b , что числа a и b являются взаимно простыми, а число $a + b^{171}$ — составное.
8. а) Найдите хотя бы одно натуральное n , для которого число $n^2 + n + 41$ — составное и не делится на 41.
б) Пусть $P(x)$ — произвольный квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n , для которого $P(n)$ — составное. *Если вы знаете, что у произвольного многочлена не может быть много корней, можете решить задачу для произвольного многочлена.*