

### Усреднение. 13 июня

**Мысль.** Если некоторая величина в среднем равняется  $k$ , то найдётся ситуация, в которой она хотя бы  $k$ , а также ситуация, в которой она не превосходит  $k$ .

**Комментарий.** Цель этого занятия — научиться применять усреднение. Поэтому решения, его не использующие, не принимаются.

**1.** Каждая из двух окружностей радиуса 1 поделена на 100 равных дуг. На каждой окружности 50 дуг покрашены в синий цвет, 50 — в красный. Докажите, что можно так совместить эти окружности, что хотя бы в 50 местах цвета дуг совпадут.

**2.** У инженера Саши есть несколько лампочек и несколько переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные — включаются, включенные — выключаются. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю. Докажите, что последовательно нажимая некоторые их переключателей, можно добиться того, чтобы включенными оказались хотя бы половина лампочек. Начальное состояние лампочек произвольное.

**3.** Теперь лампочек всего 99, каждая присоединена ровно к 25 переключателям, а переключателей ровно 50. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включенными.

**4.** В стае 2019 волчар, некоторые друг друга уважают, а некоторые друг друга — нет. Докажите, что можно так выбрать пару волчар, что среди оставшихся найдётся хотя бы 1009 волчар, каждый из которых или уважает обоих из выбранных волчар, или обоих не уважает.

**5.** В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада.

### Усреднение. 13 июня

**Мысль.** Если некоторая величина в среднем равняется  $k$ , то найдётся ситуация, в которой она хотя бы  $k$ , а также ситуация, в которой она не превосходит  $k$ .

**Комментарий.** Цель этого занятия — научиться применять усреднение. Поэтому решения, его не использующие, не принимаются.

**1.** Каждая из двух окружностей радиуса 1 поделена на 100 равных дуг. На каждой окружности 50 дуг покрашены в синий цвет, 50 — в красный. Докажите, что можно так совместить эти окружности, что хотя бы в 50 местах цвета дуг совпадут.

**2.** У инженера Саши есть несколько лампочек и несколько переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные — включаются, включенные — выключаются. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю. Докажите, что последовательно нажимая некоторые их переключателей, можно добиться того, чтобы включенными оказались хотя бы половина лампочек. Начальное состояние лампочек произвольное.

**3.** Теперь лампочек всего 99, каждая присоединена ровно к 25 переключателям, а переключателей ровно 50. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включенными.

**4.** В стае 2019 волчар, некоторые друг друга уважают, а некоторые друг друга — нет. Докажите, что можно так выбрать пару волчар, что среди оставшихся найдётся хотя бы 1009 волчар, каждый из которых или уважает обоих из выбранных волчар, или обоих не уважает.

**5.** В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада.