

Алгебраические штучки–2. 14 июня

Часть 3. Сопряженные числа в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$

Обозначение. Пусть m — натуральное число, не точный квадрат. Обозначим через $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ множество чисел вида $a + b\sqrt{m}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Аналогично определим $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

Упражнение 1. Пусть $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Докажите, что если $a_1 + b_1\sqrt{m} = a_2 + b_2\sqrt{m}$, то $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $x = a + b\sqrt{m}$. Сопряженным к x , или x -сопряженным называется число $\bar{x} = a - b\sqrt{m}$.

Упражнение 2. Почему Упражнение 1. должно идти раньше определения сопряжения?

Упражнение 3. Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

- а) Докажите, что $x + \bar{x} \in \mathbb{Q}$ и $x \cdot \bar{x} \in \mathbb{Q}$. Выведите из этого, что x — корень квадратного трёхчлена с рациональными коэффициентами.
 с) Докажите, что если $x \notin \mathbb{Q}$, то существует единственное $y \in \mathbb{R}$, что $x + y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 4. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Понятно, что $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ также принадлежат $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Докажите, что если $x_2 \neq 0$, то x_1/x_2 принадлежит $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

Упражнение 5. Пусть $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что

- а) $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$, $\overline{x_1/x_2} = \bar{x}_1/\bar{x}_2$, $\overline{f(x_0)} = f(\bar{x}_0)$.
 б) Докажите, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$. Докажите, что и \bar{x}_0 корень $f(x)$.

1. Найдите первые 100 цифр после запятой в числе $(2 + \sqrt{3})^{1000}$.

2. Докажите, что для рациональных чисел x, y, z и t не может выполняться равенство

$$(x + y\sqrt{2})^4 + (z + t\sqrt{2})^4 = 5 + 4\sqrt{2}.$$

3. Докажите, что для натуральных m и n не может выполняться равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$.

4. Докажите, что $(\sqrt{2} - 1)^{2022} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

5. Докажите, что для любого натурального n число $[(1 + \sqrt{3})^{2n+1}]$ делится на 2^{n+1} и не делится на 2^{n+2} .

Алгебраические штучки–2. 14 июня

Часть 3. Сопряженные числа в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$

Обозначение. Пусть m — натуральное число, не точный квадрат. Обозначим через $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ множество чисел вида $a + b\sqrt{m}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Аналогично определим $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

Упражнение 1. Пусть $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Докажите, что если $a_1 + b_1\sqrt{m} = a_2 + b_2\sqrt{m}$, то $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $x = a + b\sqrt{m}$. Сопряженным к x , или x -сопряженным называется число $\bar{x} = a - b\sqrt{m}$.

Упражнение 2. Почему Упражнение 1. должно идти раньше определения сопряжения?

Упражнение 3. Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

- а) Докажите, что $x + \bar{x} \in \mathbb{Q}$ и $x \cdot \bar{x} \in \mathbb{Q}$. Выведите из этого, что x — корень квадратного трёхчлена с рациональными коэффициентами.
 с) Докажите, что если $x \notin \mathbb{Q}$, то существует единственное $y \in \mathbb{R}$, что $x + y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 4. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Понятно, что $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ также принадлежат $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Докажите, что если $x_2 \neq 0$, то x_1/x_2 принадлежит $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

Упражнение 5. Пусть $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что

- а) $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$, $\overline{x_1/x_2} = \bar{x}_1/\bar{x}_2$, $\overline{f(x_0)} = f(\bar{x}_0)$.
 б) Докажите, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$. Докажите, что и \bar{x}_0 корень $f(x)$.

1. Найдите первые 100 цифр после запятой в числе $(2 + \sqrt{3})^{1000}$.

2. Докажите, что для рациональных чисел x, y, z и t не может выполняться равенство

$$(x + y\sqrt{2})^4 + (z + t\sqrt{2})^4 = 5 + 4\sqrt{2}.$$

3. Докажите, что для натуральных m и n не может выполняться равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$.

4. Докажите, что $(\sqrt{2} - 1)^{2022} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

5. Докажите, что для любого натурального n число $[(1 + \sqrt{3})^{2n+1}]$ делится на 2^{n+1} и не делится на 2^{n+2} .