

Алгебраические штучки–3. 16 июня

Часть 4. Домножение на сопряженное

Контрольный вопрос. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе, например, в числе $\frac{1}{3+2\sqrt{5}}$.

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ или $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+2}$?
2. Докажите, что для каждого натурального n

$$\sqrt{n^2+1} - n < \frac{1}{2n}.$$

3. а) Для каждого натурального n докажите, что

$$n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

б*)¹ Докажите, что найдётся такое натуральное n , что

$$n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] < \frac{1+10^{-100}}{2n\sqrt{2}}.$$

4. Пусть $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{4n+2}$. Докажите, что

$$0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

5. а) Докажите, что для любых натуральных m и n выполнено неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{10n^2}.$$

б)² (почти теорема Дирихле о диофантовых приближениях) Докажите, что для каждого натурального n можно подобрать такое натуральное m , что

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}.$$

¹не имеет отношения к теме; сложная задача: сначала решите **4.** и **5а).**

²не имеет отношения к теме

Алгебраические штучки–3. 16 июня

Часть 4. Домножение на сопряженное

Контрольный вопрос. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе, например, в числе $\frac{1}{3+2\sqrt{5}}$.

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ или $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+2}$?
2. Докажите, что для каждого натурального n

$$\sqrt{n^2+1} - n < \frac{1}{2n}.$$

3. а) Для каждого натурального n докажите, что

$$n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

б*)¹ Докажите, что найдётся такое натуральное n , что

$$n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] < \frac{1+10^{-100}}{2n\sqrt{2}}.$$

4. Пусть $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{4n+2}$. Докажите, что

$$0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

5. а) Докажите, что для любых натуральных m и n выполнено неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{10n^2}.$$

б)² (почти теорема Дирихле о диофантовых приближениях) Докажите, что для каждого натурального n можно подобрать такое натуральное m , что

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}.$$

¹не имеет отношения к теме; сложная задача: сначала решите **4.** и **5а).**

²не имеет отношения к теме