Алгебраические штучки–4. 18 июня

Часть 5. Телескопирование

Идея. $\sum_{n=1}^{N}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{N+1}$.

Упражнение 1. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Упражнение 2. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

1. Маньяк Вася исследует, на сколько изменяется произведение цифр числа при увеличении числа на 12. С этой целью для каждого из чисел от 2013 до 20139999 он выписал в тетрадь это изменение (например, для числа 11 111 он выписал 5, а для числа 11 119 он выписал отрицательное изменение -6). Чему равна сумма всех Васиных чисел?

2. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}}.$$

3. Найдите сумму

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \ldots + \frac{100}{98!+99!+100!}$$

.

4. Пусть F_n — последовательность Фибоначчи, т. е. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ для всех $k > 1$. Докажите, что для каждого натурального n выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k F_{k+2}} < 1.$$

5. Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, $n \geqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \ldots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1, \text{ для всех } n \geqslant 1.$$

6. Докажите, что для всех натуральных n

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots = n.$$

7. Докажите, что $\sum_{n=1}^{10\,000} \dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2$.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2–Э3

Алгебраические штучки–4. 18 июня

Часть 5. Телескопирование

Идея. $\sum_{n=1}^{N}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{N+1}$.

Упражнение 1. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Упражнение 2. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

1. Маньяк Вася исследует, на сколько изменяется произведение цифр числа при увеличении числа на 12. С этой целью для каждого из чисел от 2013 до 20139999 он выписал в тетрадь это изменение (например, для числа 11 111 он выписал 5, а для числа 11 119 он выписал отрицательное изменение -6). Чему равна сумма всех Васиных чисел?

2. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}}.$$

3. Найдите сумму

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \ldots + \frac{100}{98!+99!+100!}$$

.

4. Пусть F_n — последовательность Фибоначчи, т. е. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ для всех $k > 1$. Докажите, что для каждого натурального n выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k F_{k+2}} < 1.$$

5. Пусть $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, $n \geqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \ldots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1, \text{ для всех } n \geqslant 1.$$

6. Докажите, что для всех натуральных n

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots = n.$$

7. Докажите, что $\sum_{n=1}^{10\,000} \dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2$.