1. Правильные моменты. 1 октября

1. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

2. Игорь выставляет шашки по одной на доску 10×10. Докажите, что в какой-то момент одна из шашек сможет съесть другую.

3. На доске стоят 10 королей. Раз в минуту один из королей делает ход. Через некоторое время все короли снова оказались на исходных местах, а кроме того каждый король побывал ровно один раз на каждой из остальных клеток (при этом по ходу не заходя в исходную свою клетку). Докажите, что был момент, когда каждый король был не на своем исходном месте.

4 (теорема Хелли)[1]. Во время занятия каждый школьник уснул ровно один раз. Для каждой пары школьников был момент времени, когда они оба спали. Докажите, что в какой-то (видимо, скучный) момент времени спали все школьники.

5. Каждый из 18 человек знает какую-то уникальную новость. Каждый из них может написать другому письмо, в котором он может изложить все известные ему новости. Какое наименьшее количество писем должно быть отправлено, чтобы каждый узнал все 18 новостей?

6. На сабантуй пришли несколько детей, они принесли с собой эчпочмаки. Раз в минуту, один из детей, который может дать каждому из своих друзей по эчпочмаку, делает это. В какой-то момент процесс передачи прекратился. Докажите, что есть ребёнок, который ни разу не отдавал никому эчпочмаки.

7. В квадратной таблице 17×17 закрашены в чёрный цвет 80 клеток, остальные — белые. Разрешается закрасить строку или столбец в чёрный цвет, если большинство клеток на этой линии — чёрные. Докажите, что при помощи таких операций нельзя сделать всю таблицу чёрной.

На другой стороне есть ещё задачи!

[1]Наверняка, кто-то из вас её знает, но почему бы не повторить?

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

1. Правильные моменты. 1 октября

1. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

2. Игорь выставляет шашки по одной на доску 10×10. Докажите, что в какой-то момент одна из шашек сможет съесть другую.

3. На доске стоят 10 королей. Раз в минуту один из королей делает ход. Через некоторое время все короли снова оказались на исходных местах, а кроме того каждый король побывал ровно один раз на каждой из остальных клеток (при этом по ходу не заходя в исходную свою клетку). Докажите, что был момент, когда каждый король был не на своем исходном месте.

4 (теорема Хелли)[1]. Во время занятия каждый школьник уснул ровно один раз. Для каждой пары школьников был момент времени, когда они оба спали. Докажите, что в какой-то (видимо, скучный) момент времени спали все школьники.

5. Каждый из 18 человек знает какую-то уникальную новость. Каждый из них может написать другому письмо, в котором он может изложить все известные ему новости. Какое наименьшее количество писем должно быть отправлено, чтобы каждый узнал все 18 новостей?

6. На сабантуй пришли несколько детей, они принесли с собой эчпочмаки. Раз в минуту, один из детей, который может дать каждому из своих друзей по эчпочмаку, делает это. В какой-то момент процесс передачи прекратился. Докажите, что есть ребёнок, который ни разу не отдавал никому эчпочмаки.

7. В квадратной таблице 17×17 закрашены в чёрный цвет 80 клеток, остальные — белые. Разрешается закрасить строку или столбец в чёрный цвет, если большинство клеток на этой линии — чёрные. Докажите, что при помощи таких операций нельзя сделать всю таблицу чёрной.

На другой стороне есть ещё задачи!

[1]Наверняка, кто-то из вас её знает, но почему бы не повторить?

8. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

9. На доске написано натуральное число. Раз в минуту к нему прибавляют произведение его ненулевых цифр. Докажите, что какое-то число будут прибавлять бесконечно много раз.

10. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке. Расстроившись, Чип решил переупорядочить орешки посредством следующей последовательности из 2021 действия: во время k-го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером k. Докажите, что найдётся такое число k, что во время k-го действия поменялись местами орешки с номерами a и b такими, что $a < k < b$.

8. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

9. На доске написано натуральное число. Раз в минуту к нему прибавляют произведение его ненулевых цифр. Докажите, что какое-то число будут прибавлять бесконечно много раз.

10. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке. Расстроившись, Чип решил переупорядочить орешки посредством следующей последовательности из 2021 действия: во время k-го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером k. Докажите, что найдётся такое число k, что во время k-го действия поменялись местами орешки с номерами a и b такими, что $a < k < b$.