2. Сопряжение. 1 октября

Комментарий. Строго понятие сопряженного числа (одного) можно дать лишь в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, где m — не точный квадрат. Однако в задачах бывает полезно пользоваться и не формальным сопряжением, например, считая, что $a+b\sqrt{m}$ и $a-b\sqrt{m}$ сопряжённые числа даже если $m=4$.

Идея. Основная идея этого листочка — *перебрасывание из числителя в знаменатель за счёт домножения на сопряженное.* Т.е. вот такие вот равенства:

$$a \pm \sqrt{b} = \frac{a^2-b}{a \mp \sqrt{b}}, \qquad \frac{1}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{a \mp \sqrt{b}}{a^2-b}$$
$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b}$$

Комментарий. Важно научиться преобразовывать выражение к другому виду! Старайтесь в задачах делать это, хотя в некоторых задачах стоит сделать какой-то предварительный шажочек.

Важно. Возводить в квадрат нельзя!

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе в числе $\dfrac{1}{3+2\sqrt{5}}$.

2. Докажите, что для каждого натурального n

$$\sqrt{n^2+1}-n<\frac{1}{2n}.$$

3. Какое из чисел больше: $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ или $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}$?

4. Докажите, что функция a) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$; b) $\sqrt{x^2+1}-x$; c) $\sqrt{x^2+x}-x$ монотонна.

5. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

6. Докажите, что для положительных a и b выполнено неравенство

$$\frac{(a-b)^2}{8\max\{a,b\}} \leqslant \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leqslant \frac{(a-b)^2}{8\min\{a,b\}}$$

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

2. Сопряжение. 1 октября

Комментарий. Строго понятие сопряженного числа (одного) можно дать лишь в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, где m — не точный квадрат. Однако в задачах бывает полезно пользоваться и не формальным сопряжением, например, считая, что $a+b\sqrt{m}$ и $a-b\sqrt{m}$ сопряжённые числа даже если $m=4$.

Идея. Основная идея этого листочка — *перебрасывание из числителя в знаменатель за счёт домножения на сопряженное.* Т.е. вот такие вот равенства:

$$a \pm \sqrt{b} = \frac{a^2-b}{a \mp \sqrt{b}}, \qquad \frac{1}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{a \mp \sqrt{b}}{a^2-b}$$
$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b}$$

Комментарий. Важно научиться преобразовывать выражение к другому виду! Старайтесь в задачах делать это, хотя в некоторых задачах стоит сделать какой-то предварительный шажочек.

Важно. Возводить в квадрат нельзя!

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе в числе $\dfrac{1}{3+2\sqrt{5}}$.

2. Докажите, что для каждого натурального n

$$\sqrt{n^2+1}-n<\frac{1}{2n}.$$

3. Какое из чисел больше: $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ или $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}$?

4. Докажите, что функция a) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$; b) $\sqrt{x^2+1}-x$; c) $\sqrt{x^2+x}-x$ монотонна.

5. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

6. Докажите, что для положительных a и b выполнено неравенство

$$\frac{(a-b)^2}{8\max\{a,b\}} \leqslant \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leqslant \frac{(a-b)^2}{8\min\{a,b\}}$$

7[1]**.** a) Для каждого натурального n докажите, что

$$n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

b) Докажите, что для любых натуральных m и n выполнено неравенство

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{10n^2}.$$

Какой смысл у модуля разности? Дополните фразу «$\sqrt{2}$ нельзя слишком хорошо … рациональными числами»

c)[2] Докажите, что существует бесконечно много пар целых чисел m и n, для которых

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{(2\sqrt{2} - 10^{-2022}) \cdot n^2}.$$

8. Пусть $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{4n+2}$. Докажите, что

$$0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

9. Докажите, что если a и b — целые числа, по модулю не превосходящие 100, $a^2 + b^2 \neq 0$, то $\left|a\sqrt{2} + b\sqrt{3}\right| > 1/350$.

10. Пусть

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

Найдите $f(1) + f(2) + \ldots + f(40)$.

[1] объединение в пункты скорее сюжетное, а не идейное
[2] стоит пропустить и вернуться позже

7[1]**.** a) Для каждого натурального n докажите, что

$$n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

b) Докажите, что для любых натуральных m и n выполнено неравенство

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{10n^2}.$$

Какой смысл у модуля разности? Дополните фразу «$\sqrt{2}$ нельзя слишком хорошо … рациональными числами»

c)[2] Докажите, что существует бесконечно много пар целых чисел m и n, для которых

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{(2\sqrt{2} - 10^{-2022}) \cdot n^2}.$$

8. Пусть $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{4n+2}$. Докажите, что

$$0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

9. Докажите, что если a и b — целые числа, по модулю не превосходящие 100, $a^2 + b^2 \neq 0$, то $\left|a\sqrt{2} + b\sqrt{3}\right| > 1/350$.

10. Пусть

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

Найдите $f(1) + f(2) + \ldots + f(40)$.

[1] объединение в пункты скорее сюжетное, а не идейное
[2] стоит пропустить и вернуться позже