5. Неравенства–1. 2 октября

Комментарий. Разрешается использовать только неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

1. Докажите, что для действительных a_1, a_2, …, a_n выполнено

$$\text{a) } a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{4/3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Пусть $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Для неотрицательных a_k и b_k таких, что $1 \leqslant a_k b_k$ докажите, что

$$1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k b_k\right).$$

3. Докажите, что для действительных a_k, b_k, c_k выполнено

$$\text{a) } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^4 \sum_{k=1}^{n} c_k^4.$$

$$\text{b) } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

4. Докажите, что для положительных x, y, z выполнено

$$\text{a) } \left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{1/2} + \left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{1/2} + \left(\frac{z+x}{x+y+z}\right)^{1/2} \leqslant 6^{1/2}.$$

$$\text{b) } x + y + z \leqslant 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right).$$

5. Пусть $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Для каждого x докажите, что

$$\text{если } g(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cos(\beta_k x), \text{ то } \left(g(x)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + g(2x)\right).$$

На другой стороне есть ещё задачи!

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

5. Неравенства–1. 2 октября

Комментарий. Разрешается использовать только неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

1. Докажите, что для действительных a_1, a_2, …, a_n выполнено

$$\text{a) } a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{4/3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Пусть $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Для неотрицательных a_k и b_k таких, что $1 \leqslant a_k b_k$ докажите, что

$$1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k b_k\right).$$

3. Докажите, что для действительных a_k, b_k, c_k выполнено

$$\text{a) } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^4 \sum_{k=1}^{n} c_k^4.$$

$$\text{b) } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

4. Докажите, что для положительных x, y, z выполнено

$$\text{a) } \left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{1/2} + \left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{1/2} + \left(\frac{z+x}{x+y+z}\right)^{1/2} \leqslant 6^{1/2}.$$

$$\text{b) } x + y + z \leqslant 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right).$$

5. Пусть $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Для каждого x докажите, что

$$\text{если } g(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cos(\beta_k x), \text{ то } \left(g(x)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + g(2x)\right).$$

На другой стороне есть ещё задачи!

6. Пусть $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right)^2 \geqslant n^3 + 2n + 1/n.$$

7. Докажите, что действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \right|^2 \leqslant (n+2) \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

8. Докажите, что для любых c_{ij}, любых x_i и любых y_j выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_i y_j \right| \leqslant \sqrt{RC} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^2 \right)^{1/2},$$

где $R = \max_i \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}|$, $C = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|$.

9. Докажите, что для любых a_{ij} выполнено

$$n \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right)^2 + m \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right)^2 + nm \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2.$$

10. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z — множество ортогональных проекций точек S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

6. Пусть $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right)^2 \geqslant n^3 + 2n + 1/n.$$

7. Докажите, что действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \right|^2 \leqslant (n+2) \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

8. Докажите, что для любых c_{ij}, любых x_i и любых y_j выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_i y_j \right| \leqslant \sqrt{RC} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^2 \right)^{1/2},$$

где $R = \max_i \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}|$, $C = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|$.

9. Докажите, что для любых a_{ij} выполнено

$$n \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right)^2 + m \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right)^2 + nm \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2.$$

10. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z — множество ортогональных проекций точек S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$