6. Одно число. 2 октября

1. На доске записаны числа 1, 2, ..., 100. За один ход можно выбрать 2 разных числа и заменить меньшее на большее. Какое наибольшее число ходов может быть сделано?

2. Петя написал на первой доске число 5, а на второй — число 8. За один ход оба написанных числа разрешается либо увеличить на 1, либо умножить на какое-нибудь натуральное число, либо разделить на какой-нибудь их натуральный общий делитель. Можно ли несколькими такими операциями добиться, чтобы на первой доске было написано число 3, а на второй — число 5?

3. На доске написаны числа 2, 3, 9. Каждым ходом разрешается выбрать на доске два числа a и b и заменить их числами $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Можно ли такими операциями получить на доске хотя бы одно число, меньшее 1?

4. В ряд сидят попугаи, первые миллион из них что-то сказали. Начиная со следующего каждый попугай сказал «Среди предыдущих утверждений доля ложных больше 1001/2022». Докажите, что в какой-то момент доля ложных утверждений станет равна 1001/2022.

5. В квадрат 10×10 по порядку расставлены числа от 1 до 100. За ход можно: выбрать число, и прибавить к нему 2, а из двух соседей по вертикали/горизонтали/диагонали вычесть по 1 (соседи одинакового типа). Или, наоборот: отнять 2 и прибавить к двум соседям по 1. В конце снова получилась расстановка чисел от 1 до 100. Докажите, что она совпала с исходной.

6. Васе и Пете по наследству досталось много лодочек — Пете больше, чем Васе, но каждому меньше тысячи. Тогда они решили делать лодочки и сами, Петя — по пять в день, Вася — по семь. Иногда в конце рабочего дня они вместе идут в клуб сухопутных игр, и каждый сдает туда ровно половину или ровно две трети накопившихся у него изделий (в один визит оба сдают одинаковую долю — оба половину или оба две трети). Докажите, что клуб сухопутных игр удостоится не более 12 визитов приятелей.

На другой стороне есть ещё задачи!

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

6. Одно число. 2 октября

1. На доске записаны числа 1, 2, ..., 100. За один ход можно выбрать 2 разных числа и заменить меньшее на большее. Какое наибольшее число ходов может быть сделано?

2. Петя написал на первой доске число 5, а на второй — число 8. За один ход оба написанных числа разрешается либо увеличить на 1, либо умножить на какое-нибудь натуральное число, либо разделить на какой-нибудь их натуральный общий делитель. Можно ли несколькими такими операциями добиться, чтобы на первой доске было написано число 3, а на второй — число 5?

3. На доске написаны числа 2, 3, 9. Каждым ходом разрешается выбрать на доске два числа a и b и заменить их числами $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Можно ли такими операциями получить на доске хотя бы одно число, меньшее 1?

4. В ряд сидят попугаи, первые миллион из них что-то сказали. Начиная со следующего каждый попугай сказал «Среди предыдущих утверждений доля ложных больше 1001/2022». Докажите, что в какой-то момент доля ложных утверждений станет равна 1001/2022.

5. В квадрат 10×10 по порядку расставлены числа от 1 до 100. За ход можно: выбрать число, и прибавить к нему 2, а из двух соседей по вертикали/горизонтали/диагонали вычесть по 1 (соседи одинакового типа). Или, наоборот: отнять 2 и прибавить к двум соседям по 1. В конце снова получилась расстановка чисел от 1 до 100. Докажите, что она совпала с исходной.

6. Васе и Пете по наследству досталось много лодочек — Пете больше, чем Васе, но каждому меньше тысячи. Тогда они решили делать лодочки и сами, Петя — по пять в день, Вася — по семь. Иногда в конце рабочего дня они вместе идут в клуб сухопутных игр, и каждый сдает туда ровно половину или ровно две трети накопившихся у него изделий (в один визит оба сдают одинаковую долю — оба половину или оба две трети). Докажите, что клуб сухопутных игр удостоится не более 12 визитов приятелей.

На другой стороне есть ещё задачи!

7. На Марсе в ходу две денежные единицы: рубли и тугрики. Разменный автомат действует следующим образом: если положить в него n^2 рублей (при любом натуральном n, не превосходящем 26), то он выдает n тугриков. Если же положить в него m тугриков (при любом натуральном $m > 27$), то он выдаст m^2 рублей. Марсианин Саша подошел к автомату, имея в кармане только 89 тугриков. Могло ли в результате нескольких обменов у Саши остаться 2007 рублей и ни одного тугрика?

8. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

9. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005? (Сначала доска была чистой.)

10. На доске записаны 2010 натуральных чисел. Разрешается стереть любую пару чисел x, y (в которой $y > 1$) и записать вместо них либо пару чисел $2x+1$, $y-1$, либо пару $2x+1$, $\frac{1}{4}(y-1)$ (если $y-1$ делится на 4). Например, стерев числа 3 и 5, можно написать пару 7 и 4, либо пару 7, 1 (приняв $x=3$, $y=5$), либо пару 11, 2 (приняв $x=5$, $y=3$). Такие операции провели несколько раз, причем при первой операции были стерты числа 2006 и 2008. Докажите, что на доске не сможет появиться вновь первоначальный набор чисел.

7. На Марсе в ходу две денежные единицы: рубли и тугрики. Разменный автомат действует следующим образом: если положить в него n^2 рублей (при любом натуральном n, не превосходящем 26), то он выдает n тугриков. Если же положить в него m тугриков (при любом натуральном $m > 27$), то он выдаст m^2 рублей. Марсианин Саша подошел к автомату, имея в кармане только 89 тугриков. Могло ли в результате нескольких обменов у Саши остаться 2007 рублей и ни одного тугрика?

8. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

9. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005? (Сначала доска была чистой.)

10. На доске записаны 2010 натуральных чисел. Разрешается стереть любую пару чисел x, y (в которой $y > 1$) и записать вместо них либо пару чисел $2x+1$, $y-1$, либо пару $2x+1$, $\frac{1}{4}(y-1)$ (если $y-1$ делится на 4). Например, стерев числа 3 и 5, можно написать пару 7 и 4, либо пару 7, 1 (приняв $x=3$, $y=5$), либо пару 11, 2 (приняв $x=5$, $y=3$). Такие операции провели несколько раз, причем при первой операции были стерты числа 2006 и 2008. Докажите, что на доске не сможет появиться вновь первоначальный набор чисел.