10. Много сопряжённых. Алгебраические числа. 4 октября

1. Перемножаются все 2^{100} выражений вида

$$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{99}\pm\sqrt{100}.$$

Докажите, что результат — это a) целое число; b) точный квадрат.

2. Докажите, что если a, b, c — целые числа, по модулю меньшие 10^6, $a^2+b^2+c^2\neq 0$, то $\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|>10^{-21}$.

Определение. Комлексное число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами. Комплексное число, которое не является алгебраическим, называют *трансцендентным*.

Пусть f и g — два многочлена с рациональными коэффициентами, причём α является корнем обоих этих многочленов. Несложно показать, что тогда α является и корнем многочлена НОД(f,g), причём НОД(f,g) можно выбрать с рациональными коэффициентами[1]. Таким образом, каждому алгебраическому числу α соответствует единственный приведённый многочлен наименьшей степени, корнем которого является α.

Определение. Приведённый многочлен с рациональными коэффициентами наименьшей степени, корнем которого является α, называется *минимальным многочленом* для алгебраического числа α.

Степень минимального многочлена для α называется *степенью алгебраического числа α*.

Другие корни минимального многочлена α называются *сопряжёнными с α* [над $\mathbb{Q}$].

Упражнение. Осознайте, что определение сопряженного числа в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ совпадает с определением выше.

Упражнение. Осознайте, что если для какого многочлена f с рациональными коэффициентами выполнено $f(\alpha)=0$, то f делится на минимальный многочлен для α.

Основная теорема алгебры (б/д). Всякий непостоянный многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

[1] для этого достаточно вспомнить/узнать, что НОД двух многочленов чаще всего определяется как результат действия алгоритма Евклида для этих многочленов

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

10. Много сопряжённых. Алгебраические числа. 4 октября

1. Перемножаются все 2^{100} выражений вида

$$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{99}\pm\sqrt{100}.$$

Докажите, что результат — это a) целое число; b) точный квадрат.

2. Докажите, что если a, b, c — целые числа, по модулю меньшие 10^6, $a^2+b^2+c^2\neq 0$, то $\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|>10^{-21}$.

Определение. Комлексное число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами. Комплексное число, которое не является алгебраическим, называют *трансцендентным*.

Пусть f и g — два многочлена с рациональными коэффициентами, причём α является корнем обоих этих многочленов. Несложно показать, что тогда α является и корнем многочлена НОД(f,g), причём НОД(f,g) можно выбрать с рациональными коэффициентами[1]. Таким образом, каждому алгебраическому числу α соответствует единственный приведённый многочлен наименьшей степени, корнем которого является α.

Определение. Приведённый многочлен с рациональными коэффициентами наименьшей степени, корнем которого является α, называется *минимальным многочленом* для алгебраического числа α.

Степень минимального многочлена для α называется *степенью алгебраического числа α*.

Другие корни минимального многочлена α называются *сопряжёнными с α* [над $\mathbb{Q}$].

Упражнение. Осознайте, что определение сопряженного числа в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ совпадает с определением выше.

Упражнение. Осознайте, что если для какого многочлена f с рациональными коэффициентами выполнено $f(\alpha)=0$, то f делится на минимальный многочлен для α.

Основная теорема алгебры (б/д). Всякий непостоянный многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

[1] для этого достаточно вспомнить/узнать, что НОД двух многочленов чаще всего определяется как результат действия алгоритма Евклида для этих многочленов

Прямым следствием из теоремы является то, что любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратностей.

Можно показать, что минимальный многочлен не может иметь кратных корней[2]. Значит, алгебраическое число α степени n имеет n различных сопряжённых чисел (включая себя).

3 (теорема Лиувилля). Пусть α — действительное алгебраическое число степени $n > 1$. Докажите, что существует такое число $c > 0$, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ для любого целого p и натурального q.

4. Докажите, что число $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k!}$ трансцендентное.

Основная теорема о симметрических многочленах (б/д). Любой симметрический многочлен может быть единственным способом выражен как многочлен от элементарных симметрических многочленов. Иначе говоря, для любого симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$, такой что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

при этом такой многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ единственен.

5. Пусть α и β — алгебраические числа.
a) Докажите, что если $\alpha \neq 0$, то α^{-1} — алгебраическое число.
b) Пусть $\varphi(x, y)$ — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что тогда $\varphi(\alpha, \beta)$ — алгебраическое число. В частности, $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$ — алгебраические числа.

6. Пусть α и β — алгебраические числа, связанные соотношением $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, где φ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что тогда для любого числа α_i, сопряжённого с α, найдётся число β_j, сопряжённое с β, для которого $\varphi(\alpha_i, \beta_j) = 0$.

7. Пусть α — корень многочлена, коэффициентами которого — алгебраические числа. Докажите, что тогда α — алгебраическое число.

[2]иначе бы многочлен и его формальная производная имели бы общий делитель, т.е. минимальный многочлен не был бы неприводим, что очевидно не так

Прямым следствием из теоремы является то, что любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратностей.

Можно показать, что минимальный многочлен не может иметь кратных корней[2]. Значит, алгебраическое число α степени n имеет n различных сопряжённых чисел (включая себя).

3 (теорема Лиувилля). Пусть α — действительное алгебраическое число степени $n > 1$. Докажите, что существует такое число $c > 0$, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ для любого целого p и натурального q.

4. Докажите, что число $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k!}$ трансцендентное.

Основная теорема о симметрических многочленах (б/д). Любой симметрический многочлен может быть единственным способом выражен как многочлен от элементарных симметрических многочленов. Иначе говоря, для любого симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$, такой что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

при этом такой многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ единственен.

5. Пусть α и β — алгебраические числа.
a) Докажите, что если $\alpha \neq 0$, то α^{-1} — алгебраическое число.
b) Пусть $\varphi(x, y)$ — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что тогда $\varphi(\alpha, \beta)$ — алгебраическое число. В частности, $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$ — алгебраические числа.

6. Пусть α и β — алгебраические числа, связанные соотношением $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, где φ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что тогда для любого числа α_i, сопряжённого с α, найдётся число β_j, сопряжённое с β, для которого $\varphi(\alpha_i, \beta_j) = 0$.

7. Пусть α — корень многочлена, коэффициентами которого — алгебраические числа. Докажите, что тогда α — алгебраическое число.

[2]иначе бы многочлен и его формальная производная имели бы общий делитель, т.е. минимальный многочлен не был бы неприводим, что очевидно не так