## 13. Неравенства–2. 7 октября

**1.** Вспомните, что вы умеете доказывать *неравенство Бернулли*: $(1+x)^n \geqslant 1+xn$ при натуральном $n$ и $x \geqslant -1$. Пользуясь всякими методами из анализа докажите, что a) $e^x \geqslant 1+x$ для всех $x \in \mathbb{R}$; b) $(1+x)^p \geqslant 1+px$ для всех $x \geqslant -1$ и $p \geqslant 1$.

**2.** a) Пусть $\alpha$, $\beta$, $x$, $y$ — положительные действительные числа. Как оценить сверху $x^\alpha y^\beta$ с помощью линейной комбинации равных степеней $x$ и $y$?
b) Докажите, например, что $x^{2004}y + xy^{2004} \leqslant x^{2005} + y^{2005}$.

**3.** Придумайте решение, аналогичное решению задачи **2.**[1], например, для неравенства

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2 \text{ для положительных } a,\ b,\ c.$$

**4.** Докажите, что для неотрицательных $x > y$ и натурального $n$ выполнено
$$x^n - y^n \geqslant n(x-y)(xy)^{(n-1)/2}.$$

**5.** Даны положительные числа $a_i$, $c$, $d$. Найдите

$$\max\{x_1x_2\ldots x_n\colon a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = c,\ x_i \geqslant 0\},$$
$$\min\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n : x_1x_2\ldots x_n = d,\ x_i \geqslant 0\}$$

**6.** Для неотрицательных $a_i$ докажите неравенство

$$a_n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n$$

**7.** Для неотрицательных $a_k$ и $b_k$ докажите неравенство

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$

и найдите случаи равенства.

*На другой стороне есть ещё задачи!*

[1] с решением через $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ можно даже не приходить

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

13. Неравенства–2. 7 октября

1. Вспомните, что вы умеете доказывать неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geqslant 1+xn$ при натуральном $n$ и $x \geqslant -1$. Пользуясь всякими методами из анализа докажите, что a) $e^x \geqslant 1+x$ для всех $x \in \mathbb{R}$; b) $(1+x)^p \geqslant 1+px$ для всех $x \geqslant -1$ и $p \geqslant 1$.

2. a) Пусть $\alpha$, $\beta$, $x$, $y$ — положительные действительные числа. Как оценить сверху $x^\alpha y^\beta$ с помощью линейной комбинации равных степеней $x$ и $y$?
b) Докажите, например, что $x^{2004}y + xy^{2004} \leqslant x^{2005} + y^{2005}$.

3. Придумайте решение, аналогичное решению задачи 2.[1], например, для неравенства

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2 \text{ для положительных } a,\ b,\ c.$$

4. Докажите, что для неотрицательных $x > y$ и натурального $n$ выполнено
$$x^n - y^n \geqslant n(x-y)(xy)^{(n-1)/2}.$$

5. Даны положительные числа $a_i$, $c$, $d$. Найдите

$$\max\{x_1x_2\ldots x_n\colon a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = c,\ x_i \geqslant 0\},$$
$$\min\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n : x_1x_2\ldots x_n = d,\ x_i \geqslant 0\}$$

6. Для неотрицательных $a_i$ докажите неравенство

$$a_n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n$$

7. Для неотрицательных $a_k$ и $b_k$ докажите неравенство

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$

и найдите случаи равенства.

На другой стороне есть ещё задачи!

[1] с решением через $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ можно даже не приходить

**8.** Пусть $A$ и $G$ — среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$. Докажите, что если $\frac{A-G}{A} = \varepsilon < 1$, то $\rho_0 \leqslant \frac{a_k}{A} \leqslant \rho_1$, где $\rho_0 \in (0;1]$ и $\rho_1 \in [1;\infty)$ — корни уравнения $\frac{x}{e^{x-1}} = (1-\varepsilon)^n$.

**9.** Пусть $z_i = \rho_i \cdot e^{i\theta_i}$ — комплексные числа и их запись в тригонометрической форме, причём $|\theta_i| < \psi < \pi/2$. Докажите неравенство

$$\cos\psi \cdot |z_1 z_2 \ldots z_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|.$$

**10.** Докажите с помощью индукции «прыгай вперёд, шагай назад» неравенство между средним степени $m$ и средним арифметическим

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^m \leqslant \frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{m}.$$

**8.** Пусть $A$ и $G$ — среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$. Докажите, что если $\frac{A-G}{A} = \varepsilon < 1$, то $\rho_0 \leqslant \frac{a_k}{A} \leqslant \rho_1$, где $\rho_0 \in (0;1]$ и $\rho_1 \in [1;\infty)$ — корни уравнения $\frac{x}{e^{x-1}} = (1-\varepsilon)^n$.

**9.** Пусть $z_i = \rho_i \cdot e^{i\theta_i}$ — комплексные числа и их запись в тригонометрической форме, причём $|\theta_i| < \psi < \pi/2$. Докажите неравенство

$$\cos\psi \cdot |z_1 z_2 \ldots z_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|.$$

**10.** Докажите с помощью индукции «прыгай вперёд, шагай назад» неравенство между средним степени $m$ и средним арифметическим

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^m \leqslant \frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{m}.$$