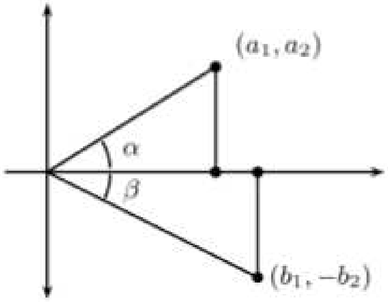
16. Неравенства–3. 9 октября

1. Посмотрите на картинку и осознайте ещё раз, почему выполнено $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_1+a_2b_2)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2$



2. Раскрывая двумя способами скобки в выражении

$$(a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D})(\alpha+\beta\sqrt{D})(\alpha-\beta\sqrt{D})$$

докажите равенство Брахмагупты

$$(a^2-Db^2)(\alpha^2-D\beta^2) = (a\alpha+Db\beta)^2 - D(a\beta+\alpha)^2.$$

3. Для неубывающих последовательностей $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ и $0 \leqslant b_1 \leqslant$ $\leqslant b_2 \leqslant \ldots$ определим для каждого натурального n

$$D_n = n\sum_{j=1}^{n} a_jb_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Докажите, что последовательность D_n также не убывает.

4. Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{a_j+b_j}\right) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$$

и найдите случаи равенства.

5. Докажите, что для каждого $0 \leqslant x \leqslant 1$ и для любой пары векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ выполнено неравенство

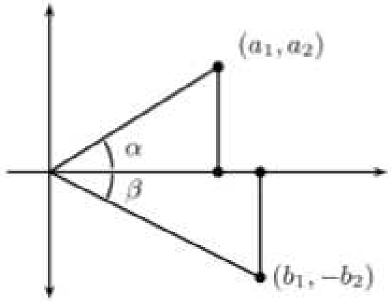
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j + x\sum_{j\neq k} a_jb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + x\sum_{j\neq k} a_ja_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2 + x\sum_{j\neq k} b_jb_k\right).$$

Что получается при $x=0$? При $x=1$?

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

16. Неравенства–3. 9 октября

1. Посмотрите на картинку и осознайте ещё раз, почему выполнено $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_1+a_2b_2)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2$



2. Раскрывая двумя способами скобки в выражении

$$(a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D})(\alpha+\beta\sqrt{D})(\alpha-\beta\sqrt{D})$$

докажите равенство Брахмагупты

$$(a^2-Db^2)(\alpha^2-D\beta^2) = (a\alpha+Db\beta)^2 - D(a\beta+\alpha)^2.$$

3. Для неубывающих последовательностей $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ и $0 \leqslant b_1 \leqslant$ $\leqslant b_2 \leqslant \ldots$ определим для каждого натурального n

$$D_n = n\sum_{j=1}^{n} a_jb_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Докажите, что последовательность D_n также не убывает.

4. Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{a_j+b_j}\right) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$$

и найдите случаи равенства.

5. Докажите, что для каждого $0 \leqslant x \leqslant 1$ и для любой пары векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j + x\sum_{j\neq k} a_jb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + x\sum_{j\neq k} a_ja_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2 + x\sum_{j\neq k} b_jb_k\right).$$

Что получается при $x=0$? При $x=1$?