## 17. Подсчёт двумя способами. 9 октября

**Мысль.** Достаточно часто двойной подсчёт устроен как подсчёт пар вида $(a, b)$, где $a$ и $b$ как-то связаны между собой: первый раз мы считаем это количество, вначале выбирая $a$, второй раз — вначале выбирая $b$.

Например, пусть мы считаем количество пар $(\text{элемент}, \text{подмножество})$, причём элемент должен лежать в подмножестве. Если мы вначале выбрали элемент $a$, то пар, у которых на первом месте стоит $a$, ровно столько, сколько существует подмножеств, содержащих $a$. Если мы вначале выбрали подмножество $b$, то пар, у которых на втором месте стоит $b$, ровно столько, сколько существует элементов в $b$.

Следующие описания помогут вам лучше понять происходящее:

- каждой подходящей паре можно выдавать по *флагу* и считать количество выданных флагов;

- можно ввести двудольный граф, где доли — это возможные значения координат, ребро проводится, если выбранная пара удовлетворяет условию, а подсчитываются количества рёбер; вначале мы считаем сумму степеней одной доли, а потом — другой доли;

- можно ввести *матрицу инцидентностей*, т.е. таблицу, у которой строки соответствуют возможным значениям первой координаты, столбцы — второй координаты, а в ячейках стоят 0 и 1, где 1 стоит на пересечении строки $a$ и столбца $b$, если пара $(a, b)$ подходит под условие; тогда вначале мы считаем количество единиц, суммируя по строкам, а затем — по столбцам.

**1.** В парламенте несколько человек, они образовали несколько комитетов, все комитеты имеют одинаковую численность. Для каждой пары парламентёров количество комитетов, в которые они оба входят, не зависит от того, какую пару парламентёров мы выбрали. Докажите, что все парламентёры входят в одно и то же число комитетов.

**2.** На соревновании присутствовали $a$ участников и нечётное число $b$ судей. Каждый судья про каждого участника сказал «Огонь!» или «Чёт не огонь». Пусть $k$ — такое число, что для любых двух судей количество участников, про которых они оба сказали одно и то же не больше $k$. Докажите, что $\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$.

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

17. Подсчёт двумя способами. 9 октября

**Мысль.** Достаточно часто двойной подсчёт устроен как подсчёт пар вида $(a, b)$, где $a$ и $b$ как-то связаны между собой: первый раз мы считаем это количество, вначале выбирая $a$, второй раз — вначале выбирая $b$.

Например, пусть мы считаем количество пар $(\text{элемент}, \text{подмножество})$, причём элемент должен лежать в подмножестве. Если мы вначале выбрали элемент $a$, то пар, у которых на первом месте стоит $a$, ровно столько, сколько существует подмножеств, содержащих $a$. Если мы вначале выбрали подмножество $b$, то пар, у которых на втором месте стоит $b$, ровно столько, сколько существует элементов в $b$.

Следующие описания помогут вам лучше понять происходящее:

- каждой подходящей паре можно выдавать по *флагу* и считать количество выданных флагов;

- можно ввести двудольный граф, где доли — это возможные значения координат, ребро проводится, если выбранная пара удовлетворяет условию, а подсчитываются количества рёбер; вначале мы считаем сумму степеней одной доли, а потом — другой доли;

- можно ввести *матрицу инцидентностей*, т.е. таблицу, у которой строки соответствуют возможным значениям первой координаты, столбцы — второй координаты, а в ячейках стоят 0 и 1, где 1 стоит на пересечении строки $a$ и столбца $b$, если пара $(a, b)$ подходит под условие; тогда вначале мы считаем количество единиц, суммируя по строкам, а затем — по столбцам.

**1.** В парламенте несколько человек, они образовали несколько комитетов, все комитеты имеют одинаковую численность. Для каждой пары парламентёров количество комитетов, в которые они оба входят, не зависит от того, какую пару парламентёров мы выбрали. Докажите, что все парламентёры входят в одно и то же число комитетов.

**2.** На соревновании присутствовали $a$ участников и нечётное число $b$ судей. Каждый судья про каждого участника сказал «Огонь!» или «Чёт не огонь». Пусть $k$ — такое число, что для любых двух судей количество участников, про которых они оба сказали одно и то же не больше $k$. Докажите, что $\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$.

**3.** В компании у любых двух знакомых друг с другом человек есть ровно 5 общих знакомых (исключая их самих). Докажите, что количество пар знакомых между собой людей в этой компании делится на 3.

**4.** Дано натуральное число $n > 1$. Найдите наибольшее возможное значение числа $m$ такое, что существует $mn$-элементное множество $S$ и такие $2n$ его $m$-элементных подмножеств, что каждые два из них пересекаются не более чем по одному элементу, а каждый элемент принадлежит ровно двум подмножествам.

**5.** В университете 10 001 студент, она образовали несколько клубов (один студент может посещать несколько клубов), клубы образовали $k$ сообществ (один клуб может входить в несколько сообществ). Известно, что:

- для каждой пары студентов есть ровно один клуб, в который они оба ходят;
- для каждого студента и каждого сообщества существует ровно один клуб этого сообщества, в который ходит этот студент;
- в каждом клубе нечётное число студентов; если в клубе $2m + 1$ студент, то клуб входит в $m$ сообществ.

Найдите все возможные значения числа $k$.

**6.** Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число, причём НОД$(n, 6) = 1$. Вершины правильного $n$-угольника покрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета нечётное количество. Докажите, что существует равнобедренный треугольник, вершины которого покрашены в три разных цвета.

**7.** На олимпиаду приехали несколько школьников, которым предложили 6 задач. Каждая пара задач была одновременно решена более чем $2/5$ всех участников. Никто не решил все 6 задач. Докажите, что есть по крайней мере 2 участника, каждый из которых решил по 5 задач.

**3.** В компании у любых двух знакомых друг с другом человек есть ровно 5 общих знакомых (исключая их самих). Докажите, что количество пар знакомых между собой людей в этой компании делится на 3.

**4.** Дано натуральное число $n > 1$. Найдите наибольшее возможное значение числа $m$ такое, что существует $mn$-элементное множество $S$ и такие $2n$ его $m$-элементных подмножеств, что каждые два из них пересекаются не более чем по одному элементу, а каждый элемент принадлежит ровно двум подмножествам.

**5.** В университете 10 001 студент, она образовали несколько клубов (один студент может посещать несколько клубов), клубы образовали $k$ сообществ (один клуб может входить в несколько сообществ). Известно, что:

- для каждой пары студентов есть ровно один клуб, в который они оба ходят;
- для каждого студента и каждого сообщества существует ровно один клуб этого сообщества, в который ходит этот студент;
- в каждом клубе нечётное число студентов; если в клубе $2m + 1$ студент, то клуб входит в $m$ сообществ.

Найдите все возможные значения числа $k$.

**6.** Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число, причём НОД$(n, 6) = 1$. Вершины правильного $n$-угольника покрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета нечётное количество. Докажите, что существует равнобедренный треугольник, вершины которого покрашены в три разных цвета.

**7.** На олимпиаду приехали несколько школьников, которым предложили 6 задач. Каждая пара задач была одновременно решена более чем $2/5$ всех участников. Никто не решил все 6 задач. Докажите, что есть по крайней мере 2 участника, каждый из которых решил по 5 задач.