18. Риман и Лебег. 10 октября

Вопрос. Почему следующие две задачи про одно и то же?

Первая. В городе несколько домов, в каждом из которых несколько этажей. Бернхард для каждого дома посчитал сколько в нём этажей, а Анри Леон — в скольких домах есть хотя бы один этаж, в скольких — хотя бы два, в скольких — хотя бы три, ...и так далее. Докажите, что суммы чисел у Бернхарда и Анри Леона совпадают.

Вторая. Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равняется

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots.$$

1. Рассмотрим куб $2019\times2019\times2019$, разбитый на маленькие кубики $1\times1\times1$. В каждом маленьком кубике напишем наименьшее количество граней, которое надо пересечь, чтобы из этого кубика вырваться за пределы кубика. Чему равна сумма всех чисел во всех кубиках?

2. Для натурального $n>1$ докажите равенство

$$[\sqrt[2]{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n].$$

3. *Расстоянием* между номерами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i, такое, что $a_i\neq b_i$. По кругу выписали все возможные пятизначные номера (могут начинаться с нуля). Какова минимальная возможная сумма расстояний между соседними?

4. В таблице 9 строк и 2013 столбцов. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2013, каждое по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке.

5. Докажите, что для любых целых чисел a_1, a_2, ..., a_n число

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_j-a_i$$

делится на число

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j-i.$$

На другой стороне есть ещё задачи!

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

18. Риман и Лебег. 10 октября

Вопрос. Почему следующие две задачи про одно и то же?

Первая. В городе несколько домов, в каждом из которых несколько этажей. Бернхард для каждого дома посчитал сколько в нём этажей, а Анри Леон — в скольких домах есть хотя бы один этаж, в скольких — хотя бы два, в скольких — хотя бы три, ...и так далее. Докажите, что суммы чисел у Бернхарда и Анри Леона совпадают.

Вторая. Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равняется

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots.$$

1. Рассмотрим куб $2019\times2019\times2019$, разбитый на маленькие кубики $1\times1\times1$. В каждом маленьком кубике напишем наименьшее количество граней, которое надо пересечь, чтобы из этого кубика вырваться за пределы кубика. Чему равна сумма всех чисел во всех кубиках?

2. Для натурального $n>1$ докажите равенство

$$[\sqrt[2]{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n].$$

3. *Расстоянием* между номерами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i, такое, что $a_i\neq b_i$. По кругу выписали все возможные пятизначные номера (могут начинаться с нуля). Какова минимальная возможная сумма расстояний между соседними?

4. В таблице 9 строк и 2013 столбцов. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2013, каждое по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке.

5. Докажите, что для любых целых чисел a_1, a_2, ..., a_n число

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_j-a_i$$

делится на число

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j-i.$$

На другой стороне есть ещё задачи!

6. Дан полный граф, на каждом ребре написана цена прохода по нему — некоторое целое неотрицательное число. Из некоторых вершин стартуют Эконом и Транжира, оба хотят пройти по всем вершинам ровно по одному разу. При этом Эконом каждый раз переходит по самому дешевому ребру из ведущих в еще не посещенные вершины, а Транжира — по самому дорогому. Докажите, что путь Транжиры не может получиться дешевле пути Эконома.

7. Пусть n — натуральное число, а M — множество из n различных натуральных чисел. Функция $f\colon M \times M \to \mathbb{N}$ определена равенством

$$f(a,b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a,b)^2}.$$

Докажите, что f принимает не менее n различных значений.

6. Дан полный граф, на каждом ребре написана цена прохода по нему — некоторое целое неотрицательное число. Из некоторых вершин стартуют Эконом и Транжира, оба хотят пройти по всем вершинам ровно по одному разу. При этом Эконом каждый раз переходит по самому дешевому ребру из ведущих в еще не посещенные вершины, а Транжира — по самому дорогому. Докажите, что путь Транжиры не может получиться дешевле пути Эконома.

7. Пусть n — натуральное число, а M — множество из n различных натуральных чисел. Функция $f\colon M \times M \to \mathbb{N}$ определена равенством

$$f(a,b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a,b)^2}.$$

Докажите, что f принимает не менее n различных значений.