19. Неравенства–4. 12 октября

1. Осознайте, что для положительных b_i и h_i выполнено

$$\min_j \frac{h_j}{b_j} \leqslant \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant \max_j \frac{h_j}{b_j}.$$

Выведите из этого, что для любого многочлена $P(x)$ с положительными коэффициентами и для любых $0<x\leqslant y$ выполнено $\left(\frac{x}{y}\right)^n \leqslant \frac{P(x)}{P(y)} \leqslant 1$.

2. Сделайте индукционный переход в неравенстве AM-GM от $n-1$ к n, заменив наибольшее и наименьшее числа a_1 и a_n на на a_1+a_n-A, где A — среднее арифметическое всех чисел.

3. Для любых векторов u и v и любых положительных чисел A, B таких, что $(u,u)\leqslant A^2$, $(v,v)\leqslant B^2$ выполнено

$$(A^2-(u,u))^{1/2}(B^2-(v,v))^{1/2} \leqslant AB-(u,v).$$

4 (неравенство Шура). Для неотрицательных x, y, z и α докажите, что

$$x^\alpha(x-y)(x-z)+y^\alpha(y-x)(y-z)+z^\alpha(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

5. Проверьте, что если $0<a\leqslant a_k\leqslant A$ и $0<b\leqslant b_k\leqslant B$, то выполняется

$$\sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2 \leqslant C\left(\sum a_k b_k\right)^2,$$

где $C=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2$.

6. Выведите неравенство Несбита из транснеравенства.

7. Сведите неравенство AM-GM к случаю $a_1a_2\ldots a_n=1$ и выведите неравенство $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant n$ в этом случае из транснеравенства.

8. Докажите, что если $0<m\leqslant x_i\leqslant M$, тогда для неотрицательных весов p_i с суммой 1 выполнено

$$\left(\sum_j p_j x_j\right)\left(\sum_j p_j \frac{1}{x_j}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

На другой стороне есть ещё задачи!

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

19. Неравенства–4. 12 октября

1. Осознайте, что для положительных b_i и h_i выполнено

$$\min_j \frac{h_j}{b_j} \leqslant \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant \max_j \frac{h_j}{b_j}.$$

Выведите из этого, что для любого многочлена $P(x)$ с положительными коэффициентами и для любых $0<x\leqslant y$ выполнено $\left(\frac{x}{y}\right)^n \leqslant \frac{P(x)}{P(y)} \leqslant 1$.

2. Сделайте индукционный переход в неравенстве AM-GM от $n-1$ к n, заменив наибольшее и наименьшее числа a_1 и a_n на на a_1+a_n-A, где A — среднее арифметическое всех чисел.

3. Для любых векторов u и v и любых положительных чисел A, B таких, что $(u,u)\leqslant A^2$, $(v,v)\leqslant B^2$ выполнено

$$(A^2-(u,u))^{1/2}(B^2-(v,v))^{1/2} \leqslant AB-(u,v).$$

4 (неравенство Шура). Для неотрицательных x, y, z и α докажите, что

$$x^\alpha(x-y)(x-z)+y^\alpha(y-x)(y-z)+z^\alpha(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

5. Проверьте, что если $0<a\leqslant a_k\leqslant A$ и $0<b\leqslant b_k\leqslant B$, то выполняется

$$\sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2 \leqslant C\left(\sum a_k b_k\right)^2,$$

где $C=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2$.

6. Выведите неравенство Несбита из транснеравенства.

7. Сведите неравенство AM-GM к случаю $a_1a_2\ldots a_n=1$ и выведите неравенство $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant n$ в этом случае из транснеравенства.

8. Докажите, что если $0<m\leqslant x_i\leqslant M$, тогда для неотрицательных весов p_i с суммой 1 выполнено

$$\left(\sum_j p_j x_j\right)\left(\sum_j p_j \frac{1}{x_j}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

На другой стороне есть ещё задачи!

9. Пусть $a_k > 0$ и $b_k > 0$. Рассмотрим функции, зависящие от параметра t

$$f_t(x) = \left(\sum_j a_j^{t+x} b_j^{t-x}\right) \left(\sum_j a_j^{t-x} b_j^{t+x}\right).$$

Докажите, что функция $f_t(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$. Осознайте, что при $t = 1$ и $x = 0$, $x = 1$ получается неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

10. Докажите транснеравенство через линейность (т.е. соображения, что линейная функция на отрезке принимает своё наибольшее и наименьшее значение в концах отрезка).

9. Пусть $a_k > 0$ и $b_k > 0$. Рассмотрим функции, зависящие от параметра t

$$f_t(x) = \left(\sum_j a_j^{t+x} b_j^{t-x}\right) \left(\sum_j a_j^{t-x} b_j^{t+x}\right).$$

Докажите, что функция $f_t(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$. Осознайте, что при $t = 1$ и $x = 0$, $x = 1$ получается неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

10. Докажите транснеравенство через линейность (т.е. соображения, что линейная функция на отрезке принимает своё наибольшее и наименьшее значение в концах отрезка).