23. Неравенства–5. 15 октября

1. Выведите из неравенства Йенсена, что при $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$$

и выведите из этого неравенства расходимость гармонического ряда.

2. Выведите из неравенства Йенсена, что для любых положительных x, y, z таких, что $x + y + z = 1$ выполнено

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

3. Выведите из неравенства Йенсена, что площадь n-угольника, вписанного в окружность, наибольшая, когда этот n-угольник правильный.

4. Пусть r_k — положительные числа, r_A — их среднее арифметическое, r_G — их среднее гармоническое. Докажите, что

$$(1 + r_G)^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + r_k) \leqslant (1 + r_A)^n.$$

5. Выведите из неравенства Йенсена задачу **13.7.**: для неотрицательных a_k и b_k выполнено

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

6. Докажите, что чисел x, y, z из отрезка $[0,1]$ выполнено

$$\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x+y} + x^2(y^2-1)(z^2-1) \leqslant 2.$$

7. Докажите, что если $0 < r < 1$ и комплексные числа z_1, z_2, …, z_n лежат внутри диска $D = \{z\colon |z| \leqslant r\}$, то существует число $z_0 \in D$, что

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + z_j) = (1 + z_0)^n.$$

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2022

23. Неравенства–5. 15 октября

1. Выведите из неравенства Йенсена, что при $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$$

и выведите из этого неравенства расходимость гармонического ряда.

2. Выведите из неравенства Йенсена, что для любых положительных x, y, z таких, что $x + y + z = 1$ выполнено

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

3. Выведите из неравенства Йенсена, что площадь n-угольника, вписанного в окружность, наибольшая, когда этот n-угольник правильный.

4. Пусть r_k — положительные числа, r_A — их среднее арифметическое, r_G — их среднее гармоническое. Докажите, что

$$(1 + r_G)^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + r_k) \leqslant (1 + r_A)^n.$$

5. Выведите из неравенства Йенсена задачу **13.7.**: для неотрицательных a_k и b_k выполнено

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

6. Докажите, что чисел x, y, z из отрезка $[0,1]$ выполнено

$$\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x+y} + x^2(y^2-1)(z^2-1) \leqslant 2.$$

7. Докажите, что если $0 < r < 1$ и комплексные числа z_1, z_2, …, z_n лежат внутри диска $D = \{z\colon |z| \leqslant r\}$, то существует число $z_0 \in D$, что

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + z_j) = (1 + z_0)^n.$$