27. Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 22 октября

1. Неравенство AM-GM с весами и неравенство Карлемана.

2. Пример многочлена от двух переменных, который неотрицателен в каждой точке, но не является суммой квадратов.

3. Обращение неравенства Коши–Буняковского–Шварца.

4. Нелинейная версия транснеравенства, сравнение произведений попарных сумм.

5. Неравенства Шура и Чебышёва.

6. Оценка разностей частей в неравенстве Йенсена.

7. Доказательство, что если a, b, c больше 1, $abc \geqslant 2^9$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+(abc)^{1/3}}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\right).$$

8. Теорема Лиувилля, явный пример трансцендентного числа.

9. Алгебраические числа: поле, замкнутость поля.

10. Как из количества точек на окружности радиуса 1 понять, для каких простых 2 является квадратичным вычетом?

11. Какие целые числа представимы в виде суммы двух квадратов?

12. Докажите, что если $p = 5k+1$, то 5 — квадратичный вычет по модулю p.

13. Стрельба фишками: конечность процесса на конечном графе в зависимости от количества фишек.

14. Стрельба фишками: инвариантность количества выстрелов в каждой вершине.

15. Стрельба фишками: оценка количества действий через количество вершин.

16. Полярное преобразование: определение, сохранение углов; доказательство леммы об изогоналях.

17. Полярное преобразование и окружность: точка Микеля, прямая Симсона.

18. Изогональное сопряжение в четырёхугольнике.

6.5. В квадрат 10×10 по порядку расставлены числа от 1 до 100. За ход можно: выбрать число, и прибавить к нему 2, а из двух соседей по вертикали/горизонтали/диагонали вычесть по 1 (соседи одинакового типа). Или, наоборот: отнять 2 и прибавить к двум соседям по 1. В конце снова получилась расстановка чисел от 1 до 100. Докажите, что она совпала с исходной.

7.2. На плоскости расположено менее $12n$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с $9n$ прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками.

7.3. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n-2$ гвоздями.

17.6. Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число, причём НОД$(n, 6) = 1$. Вершины правильного n-угольника покрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета нечётное количество. Докажите, что существует равнобедренный треугольник, вершины которого покрашены в три разных цвета.

18.5. Докажите, что для любых целых чисел a_1, a_2, …, a_n число $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_j - a_i$ делится на число $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} j-i$.

18.6. Дан полный граф, на каждом ребре написана цена прохода по нему — некоторое целое неотрицательное число. Из некоторых вершин стартуют Эконом и Транжира, оба хотят пройти по всем вершинам ровно по одному разу. При этом Эконом каждый раз переходит по самому дешевому ребру из ведущих в еще не посещенные вершины, а Транжира — по самому дорогому. Докажите, что путь Транжиры не может получиться дешевле пути Эконома.

20.2. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O, M — середина BC, D — основание высоты из A, OD и AM пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на радикальной оси окружности BOC и окружности девяти точек треугольника ABC.

22.6. Имеется доска 100×100. В некоторых узлах этой доски сидит по муравью. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1, параллельно одному из краёв доски. Если два муравья, движущиеся в противоложных направлениях, сталкиваются, они оба поворачивают на $90°$ по часовой стрелке и продолжают ползти. Если сталкиваются больше чем два муравья, или если сталкиваются муравьи, ползущие в перпендикулярных направлениях, они не меняются своих направлений. Если муравей должет выползти за край доски, то он с неё падает. Через сколько минут на доске не останется муравьёв?

26.4. В английском городе 1000 джентльменов, зарегистрированные в Реестре под номерами от 1 до 1000. Любые 720 из них образуют клуб. Мэр хочет обложить каждый клуб налогом, который выплачивается всеми участниками клуба в равных долях (налог — произвольное неотрицательное вещественное число). При этом суммарный налог, выплачиваемый джентльменом, не должен превосходить его номера в реестре. Какой наибольший налог может собрать мэр?