$axy+bx+cy+d$. 3 июня

0. Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас (*задача 2021 года*) год проведения осеннего тура делится на номер турнира: $2021 \vdots 43$. Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?

1. Для натурального числа n уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ имеет ровно 2005 решений в натуральных числах. Докажите, что n — точный квадрат.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, не представимых в виде $2ab+a+b$ с натуральными a и b.

3. Сколько решений в натуральных числах, не больших 1000000, имеет уравнение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{\text{НОК}(a,b)}=\frac{1}{\text{НОД}(a,b)}$$

при условии $b \geqslant a$?

4. Найдите все натуральные x и y для которых $\frac{xy^2}{x+y}$ — простое число.

5. Найдите все пары простых чисел p и q для которых $30p-1$ делится на q и $30q-1$ делится на p.

6. Докажите, что для натуральных m и n число $4mn-m-n$ — не квадрат.

7. Натуральное число n не свободно от квадратов. Докажите, что n представимо в виде $ab+bc+ca$ для некоторых натуральных a, b, c.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

$axy+bx+cy+d$. 3 июня

0. Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас (*задача 2021 года*) год проведения осеннего тура делится на номер турнира: $2021 \vdots 43$. Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?

1. Для натурального числа n уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ имеет ровно 2005 решений в натуральных числах. Докажите, что n — точный квадрат.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, не представимых в виде $2ab+a+b$ с натуральными a и b.

3. Сколько решений в натуральных числах, не больших 1000000, имеет уравнение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{\text{НОК}(a,b)}=\frac{1}{\text{НОД}(a,b)}$$

при условии $b \geqslant a$?

4. Найдите все натуральные x и y для которых $\frac{xy^2}{x+y}$ — простое число.

5. Найдите все пары простых чисел p и q для которых $30p-1$ делится на q и $30q-1$ делится на p.

6. Докажите, что для натуральных m и n число $4mn-m-n$ — не квадрат.

7. Натуральное число n не свободно от квадратов. Докажите, что n представимо в виде $ab+bc+ca$ для некоторых натуральных a, b, c.