Вокруг тождества Софи Жермен[1]. 4 июня

1. Разложите n^4+n^2+1 и n^4+4m^4 на множители.

2. Найдите все натуральные n, для которых n^4+4^n — простое.

3. Упростите

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

4. Докажите, что у числа $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ как минимум n различных простых делителей.

5. Докажите, что уравнение $(x^2+x+1)(y^2+y+1)=z^2+z+1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых $n!$ делится на n^2+1.

7. Натуральное число n назовём *суперсоставным*, если каждый его простой делитель меньше $\sqrt{n}$. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных суперсоставных чисел.

[1] Софи Жермен (1776—1831) — французский математик, философ и механик. Внесла весомый вклад в дифференциальную геометрию, теорию чисел и механику

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Вокруг тождества Софи Жермен[1]. 4 июня

1. Разложите n^4+n^2+1 и n^4+4m^4 на множители.

2. Найдите все натуральные n, для которых n^4+4^n — простое.

3. Упростите

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

4. Докажите, что у числа $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ как минимум n различных простых делителей.

5. Докажите, что уравнение $(x^2+x+1)(y^2+y+1)=z^2+z+1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых $n!$ делится на n^2+1.

7. Натуральное число n назовём *суперсоставным*, если каждый его простой делитель меньше $\sqrt{n}$. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных суперсоставных чисел.

[1] Софи Жермен (1776—1831) — французский математик, философ и механик. Внесла весомый вклад в дифференциальную геометрию, теорию чисел и механику