Увидеть квадратный трёхчлен. 8 июня

Пример. Докажите, что для любых действительных x, y, z выполнено неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx.$$

Пример. Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n,$$

Докажите, что из чисел m и n одно делится на другое.

Комментарий. Если в решении задач нет квадратного трёхчлена, можете даже не приходить.

1. Действительные числа x, y, a и b таковы, что $x+y = a+b$ и $x^2+y^2 = a^2 + b^2$. Докажите, что $2^{\sin a} + 2^{\sin b} = 2^{\sin x} + 2^{\sin y}$.

2. Рациональные числа x и y таковы, что $x + y$ и xy — дроби со знаменателем n. Докажите, что x и y можно представить как дроби со знаменателем не больше n.

3. Действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} таковы, что

$$7a_1^2 - 143a_1 = 7a_2^2 - 143a_2 = \ldots = 7a_{100}^2 - 143a_{100}.$$

Докажите, что среди чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} есть хотя бы 50 равных.

4. Положительные действительные числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2yz + 2zx.$$

Докажите, что среди чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ одно равно сумме двух других.

5. Докажите, что для любого действительного корня уравнения $x^3 + px + q = 0$ выполняется неравенство $4qx \leqslant p^2$.

6. Простое число p и натуральные числа a, b, c, d таковы, что $a+b+c+d$ и $ab - cd$ делятся на p. Докажите, что $a + b + c + d$ хотя бы $2p$.

7. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого набора действительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n выполнено неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Увидеть квадратный трёхчлен. 8 июня

Пример. Докажите, что для любых действительных x, y, z выполнено неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx.$$

Пример. Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n,$$

Докажите, что из чисел m и n одно делится на другое.

Комментарий. Если в решении задач нет квадратного трёхчлена, можете даже не приходить.

1. Действительные числа x, y, a и b таковы, что $x+y = a+b$ и $x^2+y^2 = a^2 + b^2$. Докажите, что $2^{\sin a} + 2^{\sin b} = 2^{\sin x} + 2^{\sin y}$.

2. Рациональные числа x и y таковы, что $x + y$ и xy — дроби со знаменателем n. Докажите, что x и y можно представить как дроби со знаменателем не больше n.

3. Действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} таковы, что

$$7a_1^2 - 143a_1 = 7a_2^2 - 143a_2 = \ldots = 7a_{100}^2 - 143a_{100}.$$

Докажите, что среди чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} есть хотя бы 50 равных.

4. Положительные действительные числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2yz + 2zx.$$

Докажите, что среди чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ одно равно сумме двух других.

5. Докажите, что для любого действительного корня уравнения $x^3 + px + q = 0$ выполняется неравенство $4qx \leqslant p^2$.

6. Простое число p и натуральные числа a, b, c, d таковы, что $a+b+c+d$ и $ab - cd$ делятся на p. Докажите, что $a + b + c + d$ хотя бы $2p$.

7. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого набора действительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n выполнено неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$