Разнобой–2. 9 июня

1. Найдите количество пар натуральных чисел m и n, каждое из которых не более 10^6, для которых $n^2 - 1$ делится на $mn - 1$.

2. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant 4a^2b^2.$$

3. На плоскости даны три точки. Из них выбираются любые две, строится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, и все точки отражаются симметрично относительно этой прямой; затем из всех точек (старых и новых) снова выбирают какие-то две точки и весь процесс повторяют. Так делается бесконечно много раз. Верно ли, что в плоскости найдется такая прямая, что все полученные точки будут лежать по одну сторону от неё?

4. На клетчатой решётке отмечено конечное количество узлов. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы на каждой вертикальной и на каждой горизонтальной прямой количество точек разного цвета отличалось не более, чем на 1.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Разнобой–2. 9 июня

1. Найдите количество пар натуральных чисел m и n, каждое из которых не более 10^6, для которых $n^2 - 1$ делится на $mn - 1$.

2. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant 4a^2b^2.$$

3. На плоскости даны три точки. Из них выбираются любые две, строится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, и все точки отражаются симметрично относительно этой прямой; затем из всех точек (старых и новых) снова выбирают какие-то две точки и весь процесс повторяют. Так делается бесконечно много раз. Верно ли, что в плоскости найдется такая прямая, что все полученные точки будут лежать по одну сторону от неё?

4. На клетчатой решётке отмечено конечное количество узлов. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы на каждой вертикальной и на каждой горизонтальной прямой количество точек разного цвета отличалось не более, чем на 1.