Конструкции в теории чисел. 9 июня

Пример. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a)-P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c,d), что разность $P(c)-P(d)$ также является квадратом натурального числа.

Пример. Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f):(1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f)=2012?$$

1. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b, что наибольший общий делитель чисел a^2+1 и b^2+1 равен $a+b$.

2. Докажите, что уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x}}=y$ имеет бесконечно много решений в рациональных числах.

3. Даны натуральные числа b и c такие, что $c+1$ делится на b. Докажите, что существуют такие натуральные x, y и z, что $x+y=bz$ и $xy=cz$.

4. Постройте натуральные x, y, z, где x — нечётно и $x^{10}+y^{10}=z^{11}$.

5. Докажите, что уравнение $x^2+y^3+z^4+t^5=p^{11}+q^{12}$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

6. Какие натуральные числа можно представить в виде $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, для некоторых попарно различных натуральных чисел x, y и z?

7. Назовем *белыми* числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где a и b — целые числа, не равные нулю. Аналогично, назовем *чёрными* числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где c и d — целые, не равные нулю числа. Может ли чёрное число равняться сумме нескольких белых?

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Конструкции в теории чисел. 9 июня

Пример. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a)-P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c,d), что разность $P(c)-P(d)$ также является квадратом натурального числа.

Пример. Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f):(1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f)=2012?$$

1. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b, что наибольший общий делитель чисел a^2+1 и b^2+1 равен $a+b$.

2. Докажите, что уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x}}=y$ имеет бесконечно много решений в рациональных числах.

3. Даны натуральные числа b и c такие, что $c+1$ делится на b. Докажите, что существуют такие натуральные x, y и z, что $x+y=bz$ и $xy=cz$.

4. Постройте натуральные x, y, z, где x — нечётно и $x^{10}+y^{10}=z^{11}$.

5. Докажите, что уравнение $x^2+y^3+z^4+t^5=p^{11}+q^{12}$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

6. Какие натуральные числа можно представить в виде $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, для некоторых попарно различных натуральных чисел x, y и z?

7. Назовем *белыми* числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где a и b — целые числа, не равные нулю. Аналогично, назовем *чёрными* числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где c и d — целые, не равные нулю числа. Может ли чёрное число равняться сумме нескольких белых?