Конструкции в теории чисел–2: исправление неподходящего примера. 13 июня

Пример. Докажите, что уравнение $y^2 = x^3 + x^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Пример. Придумайте 2023 последовательных натуральных числа, чтобы их сумма делилась на 2023!.

Совет. Думайте в сторону того, как вы вообще можете изменить имеющийся набор чисел, чтобы требуемые условия «понятно менялись».

1. Докажите, что каждое натуральное число является суммой всех попарных произведений нескольких чисел, каждое из которых равно 1 или -1. *Решение «Пусть единиц n, минус единиц — m, тогда сумма равна. . . » можно не рассказывать — я сам умею.*

2. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$, для которых

$$\text{НОД}(a_1, a_2) > \text{НОД}(a_2, a_3) > \ldots > \text{НОД}(a_9, a_{10})?$$

3. Постройте натуральные x, y такие, что $x^2 - y^3 = 120^{120}$.

4. Придумайте 100 различных натуральных чисел, чтобы было целым и их среднее арифметическое, и их среднее гармоническое, и их среднее геометрическое.

5. Постройте 100 различных целых чисел таких, что сумма кубов любых 73 из них делится на сумму квадратов этих 73 чисел.

6. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает ее со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от нее по часовой стрелке k-ю не снятую со стола карточку и тоже снимает ее. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

7. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?

На другой стороне есть ещё задачи!

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Конструкции в теории чисел–2: исправление неподходящего примера. 13 июня

Пример. Докажите, что уравнение $y^2 = x^3 + x^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Пример. Придумайте 2023 последовательных натуральных числа, чтобы их сумма делилась на 2023!.

Совет. Думайте в сторону того, как вы вообще можете изменить имеющийся набор чисел, чтобы требуемые условия «понятно менялись».

1. Докажите, что каждое натуральное число является суммой всех попарных произведений нескольких чисел, каждое из которых равно 1 или -1. *Решение «Пусть единиц n, минус единиц — m, тогда сумма равна. . . » можно не рассказывать — я сам умею.*

2. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$, для которых

$$\text{НОД}(a_1, a_2) > \text{НОД}(a_2, a_3) > \ldots > \text{НОД}(a_9, a_{10})?$$

3. Постройте натуральные x, y такие, что $x^2 - y^3 = 120^{120}$.

4. Придумайте 100 различных натуральных чисел, чтобы было целым и их среднее арифметическое, и их среднее гармоническое, и их среднее геометрическое.

5. Постройте 100 различных целых чисел таких, что сумма кубов любых 73 из них делится на сумму квадратов этих 73 чисел.

6. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает ее со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от нее по часовой стрелке k-ю не снятую со стола карточку и тоже снимает ее. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

7. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?

На другой стороне есть ещё задачи!

8. Последовательность a_1, a_2, …, a_n состоит из различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных номеров k и m выполнено неравенство

$$\text{НОД}(|a_k - a_m|, |k - m|) < 2013.$$

Найдите наибольшее возможное значение n.

9. Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

10. Докажите, что для некоторого натурального n уравнение $\varphi(x) = n$ имеет хотя бы 2000 решений.

8. Последовательность a_1, a_2, …, a_n состоит из различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных номеров k и m выполнено неравенство

$$\text{НОД}(|a_k - a_m|, |k - m|) < 2013.$$

Найдите наибольшее возможное значение n.

9. Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

10. Докажите, что для некоторого натурального n уравнение $\varphi(x) = n$ имеет хотя бы 2000 решений.