

**Разнойбой–4. 14 июня**

**1.** В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три грани. Каждая грань покрашена в красный, жёлтый или синий цвет. Докажите, что число вершин, в которых сходятся грани трёх разных цветов, чётно.

**2.** В треугольнике  $ABC$  с острыми углами  $B$  и  $C$  проведена высота  $AD$ . Биссектрисы острых углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекают высоту  $AD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что если  $BE = CF$ , то треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**3.** Найдите все пары натуральных  $m$  и  $n$ , для которых  $n^3 + 1$  делится на  $mn - 1$ .

**4.** На бесконечной клетчатой решётке 2022 клетки покрашены в чёрный цвет, остальные — в белый. Каждую минуту клетки перекрашиваются по следующему правилу. Клетка красится в чёрный цвет, если в трёхклеточном уголке, образованном этой клеткой и клетками справа и сверху от неё, не менее двух чёрных клеток. Иначе клетка красится в белый цвет. Докажите, что не более чем через 2022 минуты все клетки станут белыми.

**Разнойбой–4. 14 июня**

**1.** В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три грани. Каждая грань покрашена в красный, жёлтый или синий цвет. Докажите, что число вершин, в которых сходятся грани трёх разных цветов, чётно.

**2.** В треугольнике  $ABC$  с острыми углами  $B$  и  $C$  проведена высота  $AD$ . Биссектрисы острых углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекают высоту  $AD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что если  $BE = CF$ , то треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**3.** Найдите все пары натуральных  $m$  и  $n$ , для которых  $n^3 + 1$  делится на  $mn - 1$ .

**4.** На бесконечной клетчатой решётке 2022 клетки покрашены в чёрный цвет, остальные — в белый. Каждую минуту клетки перекрашиваются по следующему правилу. Клетка красится в чёрный цвет, если в трёхклеточном уголке, образованном этой клеткой и клетками справа и сверху от неё, не менее двух чёрных клеток. Иначе клетка красится в белый цвет. Докажите, что не более чем через 2022 минуты все клетки станут белыми.