Периодичность в теории чисел. 15 июня

Теория чисел работает с остатками, а остатков конечное число. И очень часто в реальности интересно не само число, а его остаток.

Пример. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида $10^n + 3$.

Решение. По опыту народ зачем-то решает эту задачу по модулю 7. Мы же попробуем посмотреть на задачу «сверху». Мы хотим доказать, что для некоторого простого модуля p число $10^n + 3$ делится на p для бесконечно многих p.

Как вообще ведёт себя последовательность 10^n по модулю простого $p \neq 2, 5$? Она по нему чисто периодична! *Если это не очевидно — докажите.*

Если T — длина периода, то $10^{n+T} \equiv 10^n$. Значит,

> если $10^n + 3$ делится на $p \neq 2, 5$ хотя бы один раз, то делится бесконечно много раз.

Как добиться того, чтобы 10^n+3 делилось на p хотя бы один раз? Пойти «наоборот»: подставить конкретное n, и взять у него простой делитель p. Так что задачу «логичней» всего решать по модулю 13, ну или 103, но никак не 7.

Комментарий. Если в задачах **1.**–**5.** ваше решение не следует примеру выше, то можно даже не приходить.

1. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида $(4^n + 1)^2 + 4$.

2. Докажите, что для бесконечно многих чётных n число $n^n + 1$ составное.

3. Докажите, что для бесконечно многих n число $n^n + (n + 1)^{n+1}$ составное.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n для которых каждое из чисел $2^n + 3^n - 4$ и $2^n + 3^n - 6$ составное.

5. Пусть m – натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m$, $2^n - (m-1)$, $\ldots$, $2^n + m$ — составное.

На другой стороне есть ещё задачи!

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Периодичность в теории чисел. 15 июня

Теория чисел работает с остатками, а остатков конечное число. И очень часто в реальности интересно не само число, а его остаток.

Пример. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида $10^n + 3$.

Решение. По опыту народ зачем-то решает эту задачу по модулю 7. Мы же попробуем посмотреть на задачу «сверху». Мы хотим доказать, что для некоторого простого модуля p число $10^n + 3$ делится на p для бесконечно многих p.

Как вообще ведёт себя последовательность 10^n по модулю простого $p \neq 2, 5$? Она по нему чисто периодична! *Если это не очевидно — докажите.*

Если T — длина периода, то $10^{n+T} \equiv 10^n$. Значит,

> если $10^n + 3$ делится на $p \neq 2, 5$ хотя бы один раз, то делится бесконечно много раз.

Как добиться того, чтобы 10^n+3 делилось на p хотя бы один раз? Пойти «наоборот»: подставить конкретное n, и взять у него простой делитель p. Так что задачу «логичней» всего решать по модулю 13, ну или 103, но никак не 7.

Комментарий. Если в задачах **1.**–**5.** ваше решение не следует примеру выше, то можно даже не приходить.

1. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида $(4^n + 1)^2 + 4$.

2. Докажите, что для бесконечно многих чётных n число $n^n + 1$ составное.

3. Докажите, что для бесконечно многих n число $n^n + (n + 1)^{n+1}$ составное.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n для которых каждое из чисел $2^n + 3^n - 4$ и $2^n + 3^n - 6$ составное.

5. Пусть m – натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m$, $2^n - (m-1)$, $\ldots$, $2^n + m$ — составное.

На другой стороне есть ещё задачи!

6. Докажите, что для *каждого* натурального $n > 1$ следующие числа составные: a) $11 \cdot 14^n + 1$; b) $19 \cdot 8^n + 17$.

7. Докажите, что n^{n^n} периодично (начиная с некоторого момента) по модулю простого числа $p > 1000$.

8. Дано натуральное число a. Докажите, что найдётся бесконечно много таких натуральных чисел b, что числа a и b являются взаимно простыми, а число $a^{329} + 19b^{143}$ — составное. *Выражение написано более менее наугад, придумайте решение, которое не использует уж очень сильно вид выражения.*

9. a) Найдите хотя бы одно натуральное n, для которого число $n^2 + n + 41$ — составное и не делится на 41.
b) Пусть $P(x)$ — произвольный непостоянный квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого $P(n)$ — составное.

10. Дано натуральное число $a > 100$. Докажите, что существует такое хотя бы двузначное число $n = \overline{n_k n_{k-1} \ldots n_0}$, что

$$n_k a^k + n_{k-1} a^{k-1} + \ldots + n_1 a + n_0 \,\vdots\, n.$$

6. Докажите, что для *каждого* натурального $n > 1$ следующие числа составные: a) $11 \cdot 14^n + 1$; b) $19 \cdot 8^n + 17$.

7. Докажите, что n^{n^n} периодично (начиная с некоторого момента) по модулю простого числа $p > 1000$.

8. Дано натуральное число a. Докажите, что найдётся бесконечно много таких натуральных чисел b, что числа a и b являются взаимно простыми, а число $a^{329} + 19b^{143}$ — составное. *Выражение написано более менее наугад, придумайте решение, которое не использует уж очень сильно вид выражения.*

9. a) Найдите хотя бы одно натуральное n, для которого число $n^2 + n + 41$ — составное и не делится на 41.
b) Пусть $P(x)$ — произвольный непостоянный квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого $P(n)$ — составное.

10. Дано натуральное число $a > 100$. Докажите, что существует такое хотя бы двузначное число $n = \overline{n_k n_{k-1} \ldots n_0}$, что

$$n_k a^k + n_{k-1} a^{k-1} + \ldots + n_1 a + n_0 \,\vdots\, n.$$