Умение работать по модулю. 18 июня

Чтобы хорошо решать задачи по теории чисел, важно хорошо уметь работать со сравнениями. Уже даже доказательство, что сравнения можно перемножать вызывает сложности при доказательстве. Это первый момент, когда сложно доказывать сведением к определению, но уже легко доказывать с использованием свойств:

$$ac \equiv bc \equiv bd \pmod m$$

Или возведение в степень: не надо писать «$a^n - b^n = \ldots$, откуда $a^n - b^n \,\vdots\, a - b$». Если мы говорим про умение работать со сравнениями, то надо сказать «сравнение $a \equiv b$ умножаем на себя n раз».

Чтобы ещё лучше понять разницу: можно теперь наоборот, вывести из этого делимость $a^n - b^n \,\vdots\, a - b$:

$$a \equiv b \pmod{a-b}, \text{ откуда } a^n \equiv b^n \pmod{a-b}.$$

Ниже — куча задач для того, чтобы <u>переучиться</u> (если ещё не умеете) работать именно в таком ключе. У задач могут быть другие решения, но конкретно сейчас важно прочувствовать всю силу сравнений, поэтому какие-то решения не будут приниматься. В качестве направления мысли: используйте соображения

$$a \equiv b \pmod{a-b} \text{ и } a \equiv -b \pmod{a+b}$$

1. Известно, что $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на 7.

2. Докажите, что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $3^{10} + 2^{10}$.

3. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

4. a) $(4a^2 - 1)^2$ делится на $4ab - 1$. Докажите, что $(a - b)^2$ — тоже.
b) $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$. Докажите, что $m^3 + 1$ — тоже.
c) $(n^2 - n + 1)^2$ делится на $mn - 1$. Найдите выражение меньшей степени, которое делится на $mn - 1$.

5. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа $a^2 - b$, $a^3 - c$, $c^5 - d$, $b^7 - e$ делятся на p. Докажите, что и число $ae - d$ делится на p.

На другой стороне есть ещё задачи!

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Умение работать по модулю. 18 июня

Чтобы хорошо решать задачи по теории чисел, важно хорошо уметь работать со сравнениями. Уже даже доказательство, что сравнения можно перемножать вызывает сложности при доказательстве. Это первый момент, когда сложно доказывать сведением к определению, но уже легко доказывать с использованием свойств:

$$ac \equiv bc \equiv bd \pmod m$$

Или возведение в степень: не надо писать «$a^n - b^n = \ldots$, откуда $a^n - b^n \,\vdots\, a - b$». Если мы говорим про умение работать со сравнениями, то надо сказать «сравнение $a \equiv b$ умножаем на себя n раз».

Чтобы ещё лучше понять разницу: можно теперь наоборот, вывести из этого делимость $a^n - b^n \,\vdots\, a - b$:

$$a \equiv b \pmod{a-b}, \text{ откуда } a^n \equiv b^n \pmod{a-b}.$$

Ниже — куча задач для того, чтобы <u>переучиться</u> (если ещё не умеете) работать именно в таком ключе. У задач могут быть другие решения, но конкретно сейчас важно прочувствовать всю силу сравнений, поэтому какие-то решения не будут приниматься. В качестве направления мысли: используйте соображения

$$a \equiv b \pmod{a-b} \text{ и } a \equiv -b \pmod{a+b}$$

1. Известно, что $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на 7.

2. Докажите, что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $3^{10} + 2^{10}$.

3. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

4. a) $(4a^2 - 1)^2$ делится на $4ab - 1$. Докажите, что $(a - b)^2$ — тоже.
b) $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$. Докажите, что $m^3 + 1$ — тоже.
c) $(n^2 - n + 1)^2$ делится на $mn - 1$. Найдите выражение меньшей степени, которое делится на $mn - 1$.

5. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа $a^2 - b$, $a^3 - c$, $c^5 - d$, $b^7 - e$ делятся на p. Докажите, что и число $ae - d$ делится на p.

На другой стороне есть ещё задачи!

6. a) Для какого наибольшего натурального числа n число $n^3+7n^2-2n+100$ делится на число $n+10$?
b) При каких целых n число $2n^2-3n+1$ делится на $3n-2$?

7. $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что $ac-a+1$ и $bc-c+1$ — тоже.

8. Пусть $a>1$ — натуральное число, n, $m>2$ — натуральные числа.
a) Докажите, что если a^m-1 делится на a^n-1, то m делится на n.
b) Докажите, что 2^n+1 не делится на 2^m-1.
c) Докажите, что если a^n+1 делится на a^m+1, то n делится на m.

9. a) Докажите, что $a^{10}+a^5+1$ делится на a^2+a+1.
b) Найдите все целые b такие, что при любом натуральном a число $(a^2+1)^{100}+b-a$ делится на a^2+a+1.
c) Пусть a — натуральное число. Докажите, что число

$$(a^2+1)^3+2(a^2+1)^6+\ldots+2n(a^2+1)^{6n}$$

делится на a^2-a+1 тогда и только тогда, когда n делится на a^2-a+1.

10. a, b, c, d — такие натуральные числа, что $ac+bd$ делится на a^2+b^2. Докажите, что НОД$(a^2+b^2, c^2+d^2)\neq 1$.

6. a) Для какого наибольшего натурального числа n число $n^3+7n^2-2n+100$ делится на число $n+10$?
b) При каких целых n число $2n^2-3n+1$ делится на $3n-2$?

7. $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что $ac-a+1$ и $bc-c+1$ — тоже.

8. Пусть $a>1$ — натуральное число, n, $m>2$ — натуральные числа.
a) Докажите, что если a^m-1 делится на a^n-1, то m делится на n.
b) Докажите, что 2^n+1 не делится на 2^m-1.
c) Докажите, что если a^n+1 делится на a^m+1, то n делится на m.

9. a) Докажите, что $a^{10}+a^5+1$ делится на a^2+a+1.
b) Найдите все целые b такие, что при любом натуральном a число $(a^2+1)^{100}+b-a$ делится на a^2+a+1.
c) Пусть a — натуральное число. Докажите, что число

$$(a^2+1)^3+2(a^2+1)^6+\ldots+2n(a^2+1)^{6n}$$

делится на a^2-a+1 тогда и только тогда, когда n делится на a^2-a+1.

10. a, b, c, d — такие натуральные числа, что $ac+bd$ делится на a^2+b^2. Докажите, что НОД$(a^2+b^2, c^2+d^2)\neq 1$.