Умение работать по модулю–2. 19 июня

Пример. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что $a+b+c+d$ — составное.

Классическое решение 1.

Лемма. Пусть $ab = cd$. Тогда существуют такие целые числа p, q, r, s такие, что $a = pq$, $b = rs$, $c = pr$, $d = qs$.

Доказательство. Пусть $p = (a, c)$, $a = pq$, $c = pr$. Тогда получаем равенство $qb = rd$, при этом $(q, r) = 1$, откуда $d \mathrel{\vdots} q$, пусть $d = qs$. Подставляем, получаем $b = rs$. $\square$

Тогда $a+b+c+d = pq+rs+pr+qs = (p+s)(q+r)$ — составное число.

Классическое решение 2. Подставим $d = \frac{ab}{c}$, получим

$$a+b+c+d = \frac{ac+bc+c^2+ab}{c} = \frac{(c+a)(c+b)}{c}.$$

Каждый из множителей $(c+a)$ и $(c+b)$ больше c, поэтому при сокращении (которое точно будет: мы ведь знаем, что эта дробь равна целому числу), от каждого из них останется число, большее 1. Мы представили число в виде произведения двух чисел, каждое из которых больше 1, поэтому это число составное.

Неклассическое решение 1. Пусть $a+b+c+d = p$ — простое. Тогда по модулю p мы знаем, что $a+b \equiv (-c)+(-d)$, а $ab \equiv cd$. По теореме Виета (естественно для квадратных трёхчленов по модулю p) получаем, что $\{a, b\}$ и $\{-c, -d\}$ совпадают как множества остатков при делении на p. Поскольку p больше каждого из них тогда совпадают множества $\{a, b\}$ и $\{p-c, p-d\}$, и сумма $a+b+c+d$ равна $2p$, противоречие.

Неклассическое решение 2. Пусть $a+b+c+d = p$ — простое. Тогда по модулю p мы знаем, что $a+b \equiv (-c)+(-d)$, а $ab \equiv cd$. Домножим первое сравнение на b (*чтобы получилось ab, которое мы сможем заменить на cd*), получим $ab+b^2 \equiv -bc-bd$, откуда $0 \equiv b^2+bc+bd+cd = (b+d)(b+c)$. Однако каждое из чисел $b+d$ и $b+c$ меньше p, поэтому ни одно из них на p не делится.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

Умение работать по модулю–2. 19 июня

Пример. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что $a+b+c+d$ — составное.

Классическое решение 1.

Лемма. Пусть $ab = cd$. Тогда существуют такие целые числа p, q, r, s такие, что $a = pq$, $b = rs$, $c = pr$, $d = qs$.

Доказательство. Пусть $p = (a, c)$, $a = pq$, $c = pr$. Тогда получаем равенство $qb = rd$, при этом $(q, r) = 1$, откуда $d \mathrel{\vdots} q$, пусть $d = qs$. Подставляем, получаем $b = rs$. $\square$

Тогда $a+b+c+d = pq+rs+pr+qs = (p+s)(q+r)$ — составное число.

Классическое решение 2. Подставим $d = \frac{ab}{c}$, получим

$$a+b+c+d = \frac{ac+bc+c^2+ab}{c} = \frac{(c+a)(c+b)}{c}.$$

Каждый из множителей $(c+a)$ и $(c+b)$ больше c, поэтому при сокращении (которое точно будет: мы ведь знаем, что эта дробь равна целому числу), от каждого из них останется число, большее 1. Мы представили число в виде произведения двух чисел, каждое из которых больше 1, поэтому это число составное.

Неклассическое решение 1. Пусть $a+b+c+d = p$ — простое. Тогда по модулю p мы знаем, что $a+b \equiv (-c)+(-d)$, а $ab \equiv cd$. По теореме Виета (естественно для квадратных трёхчленов по модулю p) получаем, что $\{a, b\}$ и $\{-c, -d\}$ совпадают как множества остатков при делении на p. Поскольку p больше каждого из них тогда совпадают множества $\{a, b\}$ и $\{p-c, p-d\}$, и сумма $a+b+c+d$ равна $2p$, противоречие.

Неклассическое решение 2. Пусть $a+b+c+d = p$ — простое. Тогда по модулю p мы знаем, что $a+b \equiv (-c)+(-d)$, а $ab \equiv cd$. Домножим первое сравнение на b (*чтобы получилось ab, которое мы сможем заменить на cd*), получим $ab+b^2 \equiv -bc-bd$, откуда $0 \equiv b^2+bc+bd+cd = (b+d)(b+c)$. Однако каждое из чисел $b+d$ и $b+c$ меньше p, поэтому ни одно из них на p не делится.

Комментарий. Неклассическое решение 2 — по сути передоказывание совпадения корней. Выражение $(b+d)(b+c)$ — это наш квадратный трёхчлен $(t-(-d))(t-(-c))$, в который подставлено b. Мы заранее знали, что при такой подстановке должен получится 0.

Неклассическое решение 3. Пусть $a+b+c+d=p$ — простое. Тогда по модулю p мы знаем, что $ab \equiv cd$, откуда $d \equiv \frac{ab}{c}$ (в правой части дробь по модулю, про них отдельно будет следующий листочек; c взаимно просто с p так как меньше его). Тогда

$$0 \equiv a+b+c+d \equiv \frac{ac+bc+c^2+ab}{c} = \frac{(c+a)(c+b)}{c}.$$

Значит, $(c+a)(c+b) \equiv 0$, дальше понятно.

Комментарий. Неклассическое решение 3 и классическое решение 2 очень похожи. В них различные окончания, что понятно: в неклассическом решении мы действовали от противного, и нам надо было прийти к противоречию.

1. Даны натуральные числа $a>b$ и $c>d$. Докажите, что если $a+b+c+d=ab-cd$, то число $a+c$ составное.

2. Пусть a, b, c, d — натуральные числа такие, что $a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2$. Докажите, что $a+b+c+d$ — составное.

3. Про натуральные числа a, b, c, d известно, что $ad=b^2+bc+c^2$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2$ — составное.

4. a, b, c — натуральные числа такие, что a^2-bc есть точный квадрат. Докажите, что $2a+b+c$ — составное.

5. Пусть a, b, c, d, e, f — натуральные числа такие, что $S=a+b+c+d+e+f$ делит оба числа $ab+bc+ca-de-ef-fd$ и $abc+def$. Докажите, что S составное.

6. Пусть a, b, c, d — различные натуральные числа такие, что $a^4+b^4=c^4+d^4=e^5$. Докажите, что $ac+bd$ — составное.

7. Пусть a, b, c, d, e, f — натуральные числа такие, что $abc=def$. Докажите, что $a(b^2+c^2)+d(e^2+f^2)$ составное.

Комментарий. Неклассическое решение 2 — по сути передоказывание совпадения корней. Выражение $(b+d)(b+c)$ — это наш квадратный трёхчлен $(t-(-d))(t-(-c))$, в который подставлено b. Мы заранее знали, что при такой подстановке должен получится 0.

Неклассическое решение 3. Пусть $a+b+c+d=p$ — простое. Тогда по модулю p мы знаем, что $ab \equiv cd$, откуда $d \equiv \frac{ab}{c}$ (в правой части дробь по модулю, про них отдельно будет следующий листочек; c взаимно просто с p так как меньше его). Тогда

$$0 \equiv a+b+c+d \equiv \frac{ac+bc+c^2+ab}{c} = \frac{(c+a)(c+b)}{c}.$$

Значит, $(c+a)(c+b) \equiv 0$, дальше понятно.

Комментарий. Неклассическое решение 3 и классическое решение 2 очень похожи. В них различные окончания, что понятно: в неклассическом решении мы действовали от противного, и нам надо было прийти к противоречию.

1. Даны натуральные числа $a>b$ и $c>d$. Докажите, что если $a+b+c+d=ab-cd$, то число $a+c$ составное.

2. Пусть a, b, c, d — натуральные числа такие, что $a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2$. Докажите, что $a+b+c+d$ — составное.

3. Про натуральные числа a, b, c, d известно, что $ad=b^2+bc+c^2$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2$ — составное.

4. a, b, c — натуральные числа такие, что a^2-bc есть точный квадрат. Докажите, что $2a+b+c$ — составное.

5. Пусть a, b, c, d, e, f — натуральные числа такие, что $S=a+b+c+d+e+f$ делит оба числа $ab+bc+ca-de-ef-fd$ и $abc+def$. Докажите, что S составное.

6. Пусть a, b, c, d — различные натуральные числа такие, что $a^4+b^4=c^4+d^4=e^5$. Докажите, что $ac+bd$ — составное.

7. Пусть a, b, c, d, e, f — натуральные числа такие, что $abc=def$. Докажите, что $a(b^2+c^2)+d(e^2+f^2)$ составное.