

Разнойбой–5. 20 июня

Определение. *Триангуляцией* фигуры F называется её разбиение на треугольники, причём любые два треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону.

Треугольники назовём *гранями* триангуляции, стороны маленьких треугольников — её *рёбрами*, а их вершины — её *вершинами*.

1 (лемма Шпернера). Дан треугольник, вершины которого помечены цифрами 1, 2 и 3, и его триангуляция. Вершины триангуляции поместили теми же значениями таким образом, чтобы любая вершина на стороне исходного треугольника помечена одной из пометок вершин этой стороны. Докажите, что граней, вершины которых несут три различные отметки, т.е. 1, 2 и 3, нечётное число.

2. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1, b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a .

3. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что если $\angle MBN = 45^\circ$, то угол ABC — прямой.

4. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E , что $BD = BC = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, соединяющей центр вписанной и описанной окружности треугольника ABC .

Разнойбой–5. 20 июня

Определение. *Триангуляцией* фигуры F называется её разбиение на треугольники, причём любые два треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону.

Треугольники назовём *гранями* триангуляции, стороны маленьких треугольников — её *рёбрами*, а их вершины — её *вершинами*.

1 (лемма Шпернера). Дан треугольник, вершины которого помечены цифрами 1, 2 и 3, и его триангуляция. Вершины триангуляции поместили теми же значениями таким образом, чтобы любая вершина на стороне исходного треугольника помечена одной из пометок вершин этой стороны. Докажите, что граней, вершины которых несут три различные отметки, т.е. 1, 2 и 3, нечётное число.

2. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1, b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a .

3. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что если $\angle MBN = 45^\circ$, то угол ABC — прямой.

4. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E , что $BD = BC = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, соединяющей центр вписанной и описанной окружности треугольника ABC .