Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 20 июня

Версия 1, точно ещё поменяется

1. Существование гамильтоновых пути и цикла в сильно связном турнирном графе.

2. Теорема Оре.

3. Почему можно вести индукцию по количеству вершин для сильно связных турниров? В любом сильно связном турнире есть цикл любой длины.

4. Чередующиеся цепи: критерий максимальности паросочетания.

5. Теорема Холла: доказательство через чередующиеся цепи.

6. Теорема Брукса: доказательство через чередующиеся цепи.

7. Антипараллельность.

8. Точка Шалтая: определение и основные свойства.

9. Длины отрезков касательных.

10. Степень точки.

11. Лемма Шпернера.

12. Почему n^n периодично по модулю составного числа m?

13. a) Докажите комбинаторно, что $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-2}^2 + \mathrm{C}_{n-3}^3 + \ldots = F_{n+1}$.
b) Докажите комбинаторно, что $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_m^k + \mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_m^{k-1} + \ldots + \mathrm{C}_n^{k-1}\mathrm{C}_m^1 + \mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_m^0 = \mathrm{C}_{n+m}^k$.

8/9.7. Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром O_1 проходит через точки A, O, C и пересекает прямые AB и BC в точках M и N. Пусть точка X симметрична O_1 относительно прямой MN. Докажите, что $BX \perp AC$.

13/14.8. Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.

14/12.6. Граф при удалении любого ребра не теряет связность. Докажите, что можно так ввести ориентацию на ребрах, чтобы он был сильно связным.

14/16.2. Рёбра графа G покрашены в два цвета. Степень каждой вершины хотя бы $4k$. Докажите, что в G есть простой цикл длины не менее $k+2$ с одноцветными ребрами.

22/21.4. В выпуклом 2023–угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается ровно с одной из других проведённых диагоналей. Какое можеть быть наибольшее возможное количество хороших диагоналей? А в 2024–угольнике?

23/22.3. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

23/22.6. На плоскости дано 2023 точек общего положения, одна из них синяя, остальные красные. Докажите, что количество треугольников с вершинами в красных точках, содержащих синюю, чётно.

24/26.3. Петя и Вася играют в игру на графе с 2021 вершиной. Первым ходом Петя устанавливает фишку. Далее игроки по-очереди передвигают фишку по рёбрам графа, начиная с Васи. Нельзя заходить в вершину, в которой уже была фишка. Проигрывает тот, кто не имеет хода. Кто выигрывает при правильной игре?

26/25.8. Последовательность a_1, a_2, …, a_n состоит из различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных номеров k и m выполнено неравенство

$$\text{НОД}(|a_k - a_m|, |k - m|) < 2013.$$

Найдите наибольшее возможное значение n.

30.7. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < BC$. Пусть M и N – середины сторон AB и AC соответственно, а H – основание высоты, опущенной из вершины B. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная MH, пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать в окружность.

32/33.10. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

33/31.6. Есть колода из 2^n карт. Операция «Riffle Shuffle» устроена так: колоду делят пополам на две стопки, а затем берут поочередно карты из первой и второй стопок. Другими словами, карты 1, 2, …, 2^n после операции они будут расположены в порядке 1, $2^{n-1}+1$, 2 , $2^{n-1}+2$, …, 2^{n-1}, 2^n. Докажите, что через n операций колода вернется в исходное положение.

36/37.2. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc+1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a.