

1. Устойчивые паросочетания. 20 августа

Алгоритм Гейла–Шепли (1962).

1. Исходно все мальчики и девочки не находятся в парах.
2. Каждый мальчик делает предложение наиболее предпочтительной для него девушке, которая его ещё не отвергла (или сдаётся, получив отказ от всех).
3. Каждая девочка оставляет наиболее предпочтительное предложение, а остальные отвергает.
4. Если не было ни одного отказа, то алгоритм останавливается, иначе — повторяются 2 и 3. В этот момент все девушки соглашаются на имеющиеся у них предложения.

1. Докажите, что алгоритм а) заканчивается не более чем за nt проходов; б) строит устойчивое паросочетание.
2. а) Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку.
б) А каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.
3. Докажите, что множество мальчиков и девочек, которые окажутся в парах, одно и то же для всех устойчивых паросочетаний.
4. Пусть μ — паросочетание построенное алгоритмом Гейла–Шепли, а ν — какое-то другое паросочетание (не обязательно устойчивое). Пусть S — множество тех мальчиков, которые в ν получили более предпочтительную девочку, чем в μ . Докажите, что если $S \neq \emptyset$, то найдётся пара (m, w) , нестабильная для ν , причём $m \notin S$.
5. Пусть μ — паросочетание построенное алгоритмом Гейла–Шепли. Пусть некоторое множество мальчиков S_0 решили попытаться обмануть окружающих и подменили свои списки предпочтений. Докажите, что не существует устойчивого паросочетания, в котором каждый мальчик из S_0 получит более предпочтительную девочку, чем в μ .
6. Приведите пример ситуации, когда девочке выгодно соврать, чтобы получить более предпочтительного мальчика.
7. Пусть M и N — какие-то устойчивые паросочетания. Докажите, что мальчики, которые в M получили более предпочтительных девочек, чем в N , находятся в M в парах с девочками, которые в N получили более предпочтительных мальчиков чем в M .
8. Пусть $n = m$ и у каждой из возможных n^2 пар имеется коэффициент прекрасности $a_{i,j}$, для всех разных. Каждый мальчик и каждая девочка хотят быть в паре с самым высоким коэффициентом прекрасности. Докажите, что в таком случае стабильное паросочетание только одно.
9. Пусть $n = m$. Докажите, что не существует никакого паросочетания (даже неустойчивого) при котором каждый из мальчиков находится в паре с девочкой лучше, чем девочка, которую он получает по алгоритму Гейла–Шепли.
10. Скажем, что неполное паросочетание *простое*, если неустойчивые пары включают только мальчиков без пары. Для паросочетания M обозначим r_j количество мальчиков, которых девочка j предпочитает своей паре в M ($r_j = n$, если у неё пока нет пары). Пусть M^* — простое паросочетание с наименьшей суммой r_j . Докажите, что оно стабильно. Почему есть хотя бы одно простое паросочетание?