

3. Меняй правила, крась, считай как удобно. 22 августа

1. На палочке длины 1 м сидят n муравьёв, каждый смотрит или влево, или вправо. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1 м в минуту. Если муравей доходит до конца палки, он с неё падает. Если два муравья, движущиеся в разных направлениях, сталкиваются, они оба разворачиваются и продолжают двигаться с той же скоростью, но уже в противоположных направлениях. Докажите, что через 1 минуту на палке не останется муравьёв.

2. В 120-квартирном доме живут 119 человек. Квартира называется *перенаселённой*, если в ней живут по крайней мере 15 человек. Каждый день жильцы одной из перенаселённых квартир ссорятся и разъезжаются по разным квартирам. Верно ли, что когда-нибудь переезды прекратятся?

4. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на шахматной доске 100×100 , каждым ходом — на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишки стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго.

5. Имеется доска 100×100 . В некоторых узлах этой доски сидит по муравью. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1, параллельно одному из краёв доски. Если два муравья, движущиеся в противоположных направлениях, сталкиваются, они оба поворачивают на 90° по часовой стрелке и продолжают ползти. Если сталкиваются больше чем два муравья, или если сталкиваются муравьи, ползущие в перпендикулярных направлениях, они не меняют своих направлений. Если муравей дойдёт за край доски, то он с неё падает. Докажите, что через 150 минут ни одного муравья на доске не останется. *Оценка точная: пример на 150 минут существует.*

6. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке. Расстроившись, Чип решил переупорядочить орешки посредством следующей последовательности из 2021 действия: во время k -го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером k . Докажите, что найдётся такое число k , что во время k -го действия поменялись местами орешки с номерами a и b такими, что $a < k < b$.

7. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n . Пара карточек образует инверсию, если карточка с большим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, ..., n . Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.