

4. Риман и Лебег. 23 августа

Вопрос. Почему следующие две задачи про одно и то же?

Первая. В городе несколько домов, в каждом из которых несколько этажей. Бернхард для каждого дома посчитал сколько в нём этажей, а Анри Леон — в скольких домах есть хотя бы один этаж, в скольких — хотя бы два, в скольких — хотя бы три, ... и так далее. Докажите, что суммы чисел у Бернхарда и Анри Леона совпадают.

Вторая. Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равняется

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

1. Рассмотрим куб $2019 \times 2019 \times 2019$, разбитый на маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$. В каждом маленьком кубике напишем наименьшее количество граней, которое надо пересечь, чтобы из этого кубика вырваться за пределы кубика. Чему равна сумма всех чисел во всех кубиках?

2. Для натурального $n > 1$ докажите равенство

$$[\sqrt[2]{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \dots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n].$$

3. Расстоянием между номерами $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ и $\overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5}$ назовем максимальное i , такое, что $a_i \neq b_i$. По кругу выписали все возможные пятизначные номера (могут начинаться с нуля). Какова минимальная возможная сумма расстояний между соседними?

4. В таблице 9 строк и 2013 столбцов. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2013, каждое по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке.

5. Дан полный граф, на каждом ребре написана цена прохода по нему — некоторое целое неотрицательное число. Из некоторых вершин стартуют Эконом и Транжира, оба хотят пройти по всем вершинам ровно по одному разу. При этом Эконом каждый раз переходит по самому дешевому ребру из ведущих в еще не посещенные вершины, а Транжира — по самому дорогому. Докажите, что путь Транжиры не может получиться дешевле пути Энома.

6. Докажите, что для любых целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n число

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i$$

делится на число

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} j - i.$$

7. В каждой клетке таблицы 100×100 записан ноль. За один ход разрешается выбрать любой её столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 100 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?