5. Задачи на тему следующего листочка. 24 августа

1. На сабантуй пришли 16 детей, у каждого с собой было несколько эчпочмаков. Раз в минуту какой-то ребёнок, у которого есть хотя бы 15 эчпочмаков, отдает по эчпочмаку каждому из остальных детей. Известно, что этот процесс может продолжаться бесконечно. Какое наименьшее количество эчпочмаков может быть у детей?

2. На сабантуй пришли n детей, граф дружбы которых связен и в нём m рёбер; у них с собой $2m - n + 1$ эчпочмаков. Раз в минуту, один из детей, который может дать каждому из своих друзей по эчпочмаку, делает это. Докажите, что у каждого ребёнка рано или поздно побывает эчпочмак.

3. Докажите, что если в рамках задачи **2.** дети принесли с собой $m - 1$ эчпочмак, то процесс передачи эчпочмаков рано или поздно закончится.

4. На острове расположены 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. Каждая страна использует свою валюту и располагает единственным обменным пунктом, в котором взамен 10 денежных единиц этой страны посетителю выдают по одной денежной единице всех сопредельных стран. Максим и Фёдор прилетели на остров, имея по 100 денежных единиц каждой из 10 стран. Затем их пути разошлись, и каждый из них ударился в загул по обменным пунктам, кутив пока могут. Докажите, что Максим и Фёдор посетили каждый обменный пункт одинаковое количество раз.

5. В ячейке с номером 1 лежат n элешей. За один ход можно переместить элеш из ячейки с номером k в ячейку с номером $k + 1$, если в ячейке с номером k элешей хотя бы на 2 больше, чем в ячейке с номером $k + 1$. Докажите, что финальная конфигурация элешей не зависит от порядка действий.

6. Имеется бесконечная полоска, ячейки которой занумерованы целыми числами. В ячейке с номером 0 лежат $2n - 1$ камень. За один ход разрешается выбрать ячейку с номером k и, если в ней хотя бы два камня, переложить один из них в ячейку с номером $k + 1$, а другой — в ячейку с номером $k - 1$. Докажите, что ни в какой момент времени в ячейке с номером n не будет камня.

7. Даны два взаимно простых числа натуральных числа p и q. На доске написаны n натуральных чисел. За один ход разрешается выбрать два одинаковых числа a и a и поменять их на числа $a + p$ и $a + q$. При каком наименьшем n такой процесс может продолжаться бесконечно долго?