7. МатБой–1. 26 августа

1. Есть множество $A=\{1,2,\ldots,n\}$. Изначально в Сережиной коллекции есть все n одноэлементных подмножеств A. За один ход Сережа может взять любые два непересекающиеся множества из своей коллекции и добавить туда их объединение. За какое наименьшее число ходов Сережа сможет поместить в свою коллекцию все $(n-1)$-элементные подмножества множества А?

2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC=CD$, $DE=EA$, $\angle BCD=\angle DEA=90^\circ$. Докажите, что из отрезков AC, CE и EB можно сложить треугольник, площадь которого равна площади четырехугольника $ABCE$.

3. Пусть дано натуральное число n ($n\geqslant 5$), и $3=d_1<d_2<\cdots<d_m=n!/3$ — все делители числа $n!$ от 3 до $n!/3$ включительно. Докажите, что $2d_k^2>d_{k+1}^2$ для всех $1\leqslant k<m$.

4. Дан конечный ориентированный граф без циклов. Известно, что для любой вершины A, если из неё выйти по рёбрам AB и AC, то можно найти вершину D, что до D можно дойти как из B, так и из C. Докажите, что для любой вершины любые два непродолжающихся пути из этой вершины заканчиваются в одной и той же вершине.

5. Касательная в вершине прямого угла A к описанной окружности S прямоугольного треугольника ABC пересекает луч CB в точке D. Точка E симметрична точке A относительно прямой BC. Точка P — середина высоты из вершины A треугольника AEC. Прямая CP пересекает S вторично в точке Q. Докажите, что прямая BC касается описанной окружности треугольника AQD.

6. Даны натуральные числа n, k, d. У Миши есть k карточек с числом n и достаточное число карточек со знаками действий $+$, $-$, $\times$, $/$ и скобками. Миша составил из них корректное арифметическое выражение, значение которого — натуральное число $a<\frac{n}{2^k}$. Докажите, что если все карточки с числом n заменить на карточки с числом d, то значение полученного выражения будет также равно a или не будет определено.

7. На плоскости проведены 100 прямых. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не может оказаться трех 70-угольников.

8. Дано вещественное число b. Известно, что для любого натурального числа n число $[nb]$ представляется в виде $[m\sqrt{101}]$, где m — натуральное число. Докажите, что число $\frac{b}{\sqrt{101}}$ — целое.

9. Натуральные числа раскрашены в 3 цвета так, что цвет НОД(a,b) однозначно определяется цветами чисел a и b. Докажите, что цвет НОД(a,b) совпадает с цветом числа a или с цветом числа b.

10. Про 27 монет известно, что 26 из них настоящие и весят 1 грамм, а ещё одна монета фальшивая и весит m, $m+1$ или $m+2$ граммов (где m — натуральное число, известное взвешивающему). Оказалось, что за два взвешивания на чашечных весах без гирь можно определить вес фальшивой монеты. При каком наибольшем m это возможно?

7. МатБой–2. 26 августа

1. Точки M и N делят сторону BC треугольника ABC на три равные части ($BM = MN = NC$). Точка F — середина отрезка AN. Прямая, проходящая через F и параллельная AC, пересекает AB в точке D, а AM — в точке E. Найдите отношение $DE : EF$.

2. Сколькими способами можно так расставить ладей на доске 50×50, чтобы каждое поле (как пустое, так и занятое) было побито одинаковым числом ладей. (Ладья бьет поле или другую ладью на той же вертикали или горизонтали, если между ними нет других фигур. Ладья себя не бьет).

3. Все натуральные числа раскрашены в k цветов так, что цвет НОД(a, b) однозначно определяется цветами a и b (например, цвет НОД синего и красного чисел всегда синий). При каких k верно, что тогда цвет НОД(a, b) всегда совпадает с цветом числа a или с цветом числа b?

4. Дано натуральное $k \leqslant 16$. Среди 48 монет имеется ровно одна фальшивая, причем она весит либо в k раз, либо в $k + 1$ раз, либо в $k + 2$ раз больше, чем настоящая монета. Докажите, что можно за два взвешивания выяснить, какой из этих трех случаев имеет место.

5. На математическом турнире хорошо решают задачи по алгебре 24 команды, хорошо решают задачи по геометрии 24 команды, и 24 команды хорошо решают логические задачи. Докажите, что можно собрать в одну лигу несколько команд так, чтобы в этой лиге ровно четыре команды хорошо решали задачи по алгебре, ровно четыре команды хорошо решали задачи по геометрии, и ровно четыре команды хорошо решали логические задачи.

6. Последовательность $\{a_n\}$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) задана формулой $a_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Найдите НОД$(a_0, a_1, \ldots, a_{2007})$.

7. Дан конечный ориентированный граф без циклов. Известно, что для любой вершины A, если из неё выйти по рёбрам AB и AC, то можно найти вершину D, что до D можно дойти как из B, так и из C. Докажите, что для любой вершины любые два непродолжающихся пути из этой вершины заканчиваются в одной и той же вершине.

8. Функция f определена на множестве всех натуральных чисел, принимает значения в множестве натуральных чисел, и одно из её значений равно 1. Кроме того, известно, что для любого натурального n выполнено равенство $f(n + f(n)) = f(n)$. Докажите, что эта функция при всех значениях аргумента принимает значение 1.

9. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC. На каждой из трёх дуг AB, AC и BC, на которые разбивается окружность, выбрано по точке (F, E, D соответственно), и в этих точках проведены касательные к окружности. Заключённый между прямыми AB и AC отрезок касательной, проведённой через точку F, делится этой точкой пополам. Аналогично устроены отрезок касательной в точке E и отрезок касательной в точке D. Докажите, что треугольник DEF — правильный.

10. Докажите, что для любых чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in [1; \sqrt{2}]$ выполнено неравенство

$$\frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_2^2 - 1}}{x_3} + \cdots + \frac{\sqrt{x_n^2 - 1}}{x_1} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} n.$$