1. Вступительный разнобой–1. 11 августа

1. У каждого из 30 людей было по одной шляпе. Однажды каждый передал шляпу кому-то из компании, не самому себе. Докажите, что найдётся группа из 10 человек, внутри которой шляпы не передавались.

2. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, … и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m + a_n = P(mn)$ для любых натуральных m и n?

3. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число n^2+n+1 делится на число d^2+d+1. Докажите, что n — или простое число, или квадрат простого числа.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает сторону AD и окружность S в точках K и M соответственно. Биссектриса угла CBD пересекает сторону CD и окружность S в точках L и N соответственно. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

5. На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Обязательно ли можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени?

6. Найдите все пары целых чисел a и b такие, что $a^2 + 4b$ и $b^2 + 4a$ — оба точные квадраты.

7. Пусть ABC — остроугольный треугольник; BH_B, CH_C — высоты треугольника; M_B, M_C — середины сторон CA и AB; T — пересечение M_BM_C и H_BH_C; O, H — центр описанной окружности и ортоцентр. Докажите, что $AT \perp OH$.

«Спектр», 9 класс Байтик, август 2021

1. Вступительный разнобой–1. 11 августа

1. У каждого из 30 людей было по одной шляпе. Однажды каждый передал шляпу кому-то из компании, не самому себе. Докажите, что найдётся группа из 10 человек, внутри которой шляпы не передавались.

2. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, … и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m + a_n = P(mn)$ для любых натуральных m и n?

3. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число n^2+n+1 делится на число d^2+d+1. Докажите, что n — или простое число, или квадрат простого числа.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает сторону AD и окружность S в точках K и M соответственно. Биссектриса угла CBD пересекает сторону CD и окружность S в точках L и N соответственно. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

5. На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Обязательно ли можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени?

6. Найдите все пары целых чисел a и b такие, что $a^2 + 4b$ и $b^2 + 4a$ — оба точные квадраты.

7. Пусть ABC — остроугольный треугольник; BH_B, CH_C — высоты треугольника; M_B, M_C — середины сторон CA и AB; T — пересечение M_BM_C и H_BH_C; O, H — центр описанной окружности и ортоцентр. Докажите, что $AT \perp OH$.