2. Вступительный разнобой–2. 11 августа

1. Существуют ли многочлен P с целыми коэффициентами и такие различные целые числа a, b и c, что $P(a) = b$, $P(b) = c$ и $P(c) = a$?

2. По кругу лежат 500 монет: 5 орлом, 5 решкой, 5 орлом, 5 решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если один из её соседей лежит орлом, а другой — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?

3. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M. Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC.

4. Дано натуральное n. Какое наибольшее количество упорядоченных троек целых неотрицательных чисел $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots$ можно выбрать так, чтобы сумма трёх чисел в каждой тройке была равна $3n$, и никакое число не встречалось в двух тройках на одной и той же позиции?

5. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффицикнтами, причём известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него при любом целом n.

«Спектр», 9 класс *Байтик, август 2021*

2. Вступительный разнобой–2. 11 августа

1. Существуют ли многочлен P с целыми коэффициентами и такие различные целые числа a, b и c, что $P(a) = b$, $P(b) = c$ и $P(c) = a$?

2. По кругу лежат 500 монет: 5 орлом, 5 решкой, 5 орлом, 5 решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если один из её соседей лежит орлом, а другой — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?

3. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M. Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC.

4. Дано натуральное n. Какое наибольшее количество упорядоченных троек целых неотрицательных чисел $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots$ можно выбрать так, чтобы сумма трёх чисел в каждой тройке была равна $3n$, и никакое число не встречалось в двух тройках на одной и той же позиции?

5. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффицикнтами, причём известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него при любом целом n.