4. Системы линейный уравнений: теория. 12 августа

Определение. m, n — натуральные числа, a_{ij}, b_i — элементы некоторого множества K (в рамках этого листочка $K = \mathbb{R}$). *Системой m линейных уравнений от n переменных x_1, x_2, …, x_n* называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases};$$

a_{ij} — *коэффициент* при переменной x_j в i-ом уравнении, b_i — *свободный член*[1] i-го уравнения.

Определение. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, иначе — *неоднородной*.

Определение. *Решением* системы линейных уравнений называется упорядоченный набор из n элементов K $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, $\ell_i \in K$, такой, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, при подстановке в i-ое уравнение ℓ_j вместо x_j получается верное числовое равенство.

Определение. Обозначим X множество всех решений системы линейных уравнений. Если $X = \varnothing$ (т.е. система линейных уравнений не имеет решений), то система называется *несовместной*. Если $X \neq \varnothing$ (т.е. система имеет решение), то система называется *совместной*. Если $|X| = 1$, то система называется *определенной*. Если $|X| > 1$, то система называется *неопределенной*.

0_1. Почему однородная система линейных уравнений всегда совместная?

Определение. Две системы линейных уравнений *от одного* набора x_1, x_2, …, x_n неизвестных называются *эквивалентными*, если множество их решений $X_{\mathbf{I}}$ и $X_{\mathbf{II}}$ совпадают.

0_2. Почему две несовместные системы линейных уравнение от одного набора переменных эквивалентны?

Определение. Следующие преобразования системы линейных уравнений будем называть *элементарными*:
1. при $i \neq j$ к i-ому уравнению системы прибавить j-ое, умноженное на некоторое число $c \in K$;
2. при $i \neq j$ поменять i-ое и j-ое уравнения местами;
3. i-ое уравнение умножить на $c \neq 0$.

1. a) Докажите, что если от системы (**I**) можно перейти к системе (**II**) при помощи конечного числа элементарных преобразований, то и от системы (**II**) можно перейти к системе (**I**) при помощи конечного числа элементарных преобразований.
b) Докажите, что если от системы (**I**) можно перейти к системе (**II**) при помощи конечного числа элементарных преобразований, то системы (**I**) и (**II**) эквивалентны.

Определение. Уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$ будем называть *экзотическими*, а где $b = 0$ — *нулевым*. Уравнение, где хотя бы один из коэффициентов перед x_i не равен нулю будем называть *ненулевым*. *Ведущим коэффициентом* ненулевого уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ будем называть первый ненулевой коэффициент a_s.

Определение. Система линейных уравнений называется *ступенчатой*, если
1. в ней вначале идут ненулевые уравнения, потом не более одного экзотического, а потом нулевые;
2. номер ведущего элемента в ненулевом уравнении с бóльшим номером стоит строго правее, т.е. если a_{is} и a_{jt} — ведущие элементы в i-ом и j-ом уравнении соответственно и $i < j$, то $s < t$.

0_3. Когда ступенчатая система линейных уравнений совместна, а когда – нет?

Определение. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_r$ — номера ведущих коэффициентов ненулевых уравнений ступенчатой системы линейных уравнений. Переменные x_{j_1}, x_{j_2}, …, x_{j_r} назовём *главными*, а остальные — *свободными*.

2 (метод Гаусса). a) Докажите, что всякую систему линейных уравнений конечным числом элементарных преобразований 1-ого и 2-ого типа можно привести к ступенчатому виду.
b) Пусть есть совместная ступенчатая система линейных уравнений. Докажите, что при любых значениях свободных переменных значения главных переменных определяются однозначно.

3. Докажите, что всякая однородная система линейных уравнений, число уравнений которой меньше числа переменных, имеет ненулевое решение.

4. Докажите, что если система совместна и имеет только рациональные решения, то она определена.

5. Докажите, что если однородная система имеет ненулевое рациональное решение, то она имеет ненулевое целочисленное решение.

6 (почти альтернатива Фредгольма). a) Пусть $m = n$ (т.е. уравнений столько же, сколько переменных). Докажите, что тогда либо система линейных уравнений определена, либо соответствующая ей однородная система (т.е. однородная система с теми же коэффициентами) имеет ненулевое решение.
b) Выведите из пункта a) существование и единственность интерполяционного многочлена.

7. Докажите, что если $K = \mathbb{Z}_p$, где p — простое, то количество главных и свободных переменных не зависит от способа приведения системы к ступенчатому виду. *Это же верно и для $K = \mathbb{R}$, но это уже совсем другая история…*

[1] я обычно называю *правая часть*