6. Системы линейный уравнений: задачи. 13 августа

1. В стаде 101 корова. Если увести любую одну корову, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части будет равен суммарному весу коров другой части. Докажите, что все коровы весят одинаково.

2. На доске выписано 100 чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

3. По кругу стоят 99 чисел, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

4. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов натуральные.

5. В некоторых вершинах связного графа (без петель и кратных ребер) записаны действительные числа. Докажите, что можно записать числа в оставшихся вершинах, так чтобы каждое из вновь написанных чисел было бы средним арифметическим своих соседей.

6. В n-элементном множестве выделены $n-1$ подмножеств. Докажите, что можно покрасить некоторые элементы в красный и синий цвета так, что в каждом выделенном подмножестве либо не будет окрашенных элементов, либо будут присутствовать элементы обоих цветов.

7. На отрезке $[0,1]$ отмечены концы, а также конечное число различных точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

8. Рёбра полного граф на n вершинах представлены как объединение m непересекающихся по рёбрам полных двудольных графов. Докажите, что $m \geqslant n-1$.

9. В n-элементном множестве выбраны m различных собственных подмножеств; любые два из подмножеств пересекаются не более чем по одному элементу; каждая пара элементов встречается ровно в одном подмножестве. Докажите, что $m \geqslant n$.

10. Докажите, что если прямоугольник можно разрезать на несколько квадратов, то отношение длин его сторон рационально.

«Спектр», 9 класс *Байтик, август 2021*

6. Системы линейный уравнений: задачи. 13 августа

1. В стаде 101 корова. Если увести любую одну корову, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части будет равен суммарному весу коров другой части. Докажите, что все коровы весят одинаково.

2. На доске выписано 100 чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

3. По кругу стоят 99 чисел, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

4. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов натуральные.

5. В некоторых вершинах связного графа (без петель и кратных ребер) записаны действительные числа. Докажите, что можно записать числа в оставшихся вершинах, так чтобы каждое из вновь написанных чисел было бы средним арифметическим своих соседей.

6. В n-элементном множестве выделены $n-1$ подмножеств. Докажите, что можно покрасить некоторые элементы в красный и синий цвета так, что в каждом выделенном подмножестве либо не будет окрашенных элементов, либо будут присутствовать элементы обоих цветов.

7. На отрезке $[0,1]$ отмечены концы, а также конечное число различных точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

8. Рёбра полного граф на n вершинах представлены как объединение m непересекающихся по рёбрам полных двудольных графов. Докажите, что $m \geqslant n-1$.

9. В n-элементном множестве выбраны m различных собственных подмножеств; любые два из подмножеств пересекаются не более чем по одному элементу; каждая пара элементов встречается ровно в одном подмножестве. Докажите, что $m \geqslant n$.

10. Докажите, что если прямоугольник можно разрезать на несколько квадратов, то отношение длин его сторон рационально.