7. Разнобой–1. 13 августа

1. Докажите, что существует бесконечно много решений уравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

в целых числах.

2. Пусть m – натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m$, $2^n - (m-1)$, $\ldots$, $2^n + m$ — составное.

3. Тройку чисел a, b, c можно поменять на тройку $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, c. Можно ли через несколько операций получить из тройки $2-\sqrt{2}$; 1; $2\sqrt{2}+3$ тройку $\sqrt{2}-1$; 2; $3\sqrt{2}-1$?

4. Калькулятор имеет четыре кнопки: две желтые — «+2», «−2» и две красные — «×3», «/3» (последняя работает только если число на экране делится на три). Запрещается три раза подряд нажимать на желтые кнопки. Можно ли из числа 112^{211} получить число 212^{121} так, чтобы в ходе вычислений никакое число не появилось бы на экране дважды?

«Спектр», 9 класс Байтик, август 2021

7. Разнобой–1. 13 августа

1. Докажите, что существует бесконечно много решений уравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

в целых числах.

2. Пусть m – натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m$, $2^n - (m-1)$, $\ldots$, $2^n + m$ — составное.

3. Тройку чисел a, b, c можно поменять на тройку $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, c. Можно ли через несколько операций получить из тройки $2-\sqrt{2}$; 1; $2\sqrt{2}+3$ тройку $\sqrt{2}-1$; 2; $3\sqrt{2}-1$?

4. Калькулятор имеет четыре кнопки: две желтые — «+2», «−2» и две красные — «×3», «/3» (последняя работает только если число на экране делится на три). Запрещается три раза подряд нажимать на желтые кнопки. Можно ли из числа 112^{211} получить число 212^{121} так, чтобы в ходе вычислений никакое число не появилось бы на экране дважды?