

8. Катастрофы. 14 августа

Пример. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

1. Имеется выпуклый 1000-угольник, внутри которого отмечена точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что количество треугольников с вершинами в вершинах 1000-угольника, внутри которых оказалась точка P , чётно.

2. На плоскости даны 2021 черных и 2021 белых точек (все вместе точки в общем положении). Может ли число точек пересечения отрезков, оба конца которых чёрные, с отрезками, оба конца которых белые, быть равно 2021?

3. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

4. На окружности отмечены две точки A и B . Найдите ГМТ середин хорд, у которых концы лежат на разных дугах, на которые A и B делят окружность.

5. На плоскости отмечено $n \geq 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через c_k количество выпуклых k -угольников с вершинами в отмеченных точках, внутри которых нет других отмеченных точек. Докажите, что выражение $\sum_{k=3}^n (-1)^k c_k$ зависит только от n (т.е. не зависит от положения исходных точек).

6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P , одна из сторон которых совпадает с b . Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам многоугольника P , не меньше удвоенной площади многоугольника P .

7. На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не менее $n - 2$ треугольников. *Оценка точная: на плоскости можно расположить n прямых общего положения так, чтобы среди частей, на которые они делят плоскость, будет ровно $n - 2$ треугольника.*

8. Катастрофы. 14 августа

Пример. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

1. Имеется выпуклый 1000-угольник, внутри которого отмечена точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что количество треугольников с вершинами в вершинах 1000-угольника, внутри которых оказалась точка P , чётно.

2. На плоскости даны 2021 черных и 2021 белых точек (все вместе точки в общем положении). Может ли число точек пересечения отрезков, оба конца которых чёрные, с отрезками, оба конца которых белые, быть равно 2021?

3. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

4. На окружности отмечены две точки A и B . Найдите ГМТ середин хорд, у которых концы лежат на разных дугах, на которые A и B делят окружность.

5. На плоскости отмечено $n \geq 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через c_k количество выпуклых k -угольников с вершинами в отмеченных точках, внутри которых нет других отмеченных точек. Докажите, что выражение $\sum_{k=3}^n (-1)^k c_k$ зависит только от n (т.е. не зависит от положения исходных точек).

6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P , одна из сторон которых совпадает с b . Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам многоугольника P , не меньше удвоенной площади многоугольника P .

7. На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не менее $n - 2$ треугольников. *Оценка точная: на плоскости можно расположить n прямых общего положения так, чтобы среди частей, на которые они делят плоскость, будет ровно $n - 2$ треугольника.*