10. Варьирование. 16 августа

1. Про 100 чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} известно, что $x_1 = 1$, а для всех $k \geqslant 2$ выполнено $0 \leqslant x_k \leqslant 2x_{k-1}$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{99} - x_{100}$?

2. В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.

3. Для положительных a, b, c, A, B, C, k, удовлетворяющих равенству $a + A = b + B = c + C = k$, докажите, что

$$aB + bC + cA \leqslant k^2.$$

4. Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров её граней.

5. У безумного архитектора имеются в наличии 100 кирпичей. Он хочет выстроить из них 100-уровневую башню с максимально возможной длиной проекции на поверхность земли. Чему будет равна длина этой проекции, если каждый уровень башни состоит ровно из одного расположенного горизонтально кирпича?

6. Пусть M — выпуклый многоугольник, содержащийся в единичном квадрате, а S и P — его площадь и периметр соответственно. Докажите, что

$$S \geqslant \frac{2+\sqrt{2}}{4} \cdot (P - 2\sqrt{2}).$$

7. Даны неотрицательные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ и действительные числа $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \min\{a_i, a_j\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i d_j \min\{b_i, b_j\} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j \min\{a_i, b_j\}$$

«Спектр», 9 класс Байтик, август 2021

10. Варьирование. 16 августа

1. Про 100 чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} известно, что $x_1 = 1$, а для всех $k \geqslant 2$ выполнено $0 \leqslant x_k \leqslant 2x_{k-1}$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{99} - x_{100}$?

2. В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.

3. Для положительных a, b, c, A, B, C, k, удовлетворяющих равенству $a + A = b + B = c + C = k$, докажите, что

$$aB + bC + cA \leqslant k^2.$$

4. Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров её граней.

5. У безумного архитектора имеются в наличии 100 кирпичей. Он хочет выстроить из них 100-уровневую башню с максимально возможной длиной проекции на поверхность земли. Чему будет равна длина этой проекции, если каждый уровень башни состоит ровно из одного расположенного горизонтально кирпича?

6. Пусть M — выпуклый многоугольник, содержащийся в единичном квадрате, а S и P — его площадь и периметр соответственно. Докажите, что

$$S \geqslant \frac{2+\sqrt{2}}{4} \cdot (P - 2\sqrt{2}).$$

7. Даны неотрицательные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ и действительные числа $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \min\{a_i, a_j\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i d_j \min\{b_i, b_j\} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j \min\{a_i, b_j\}$$