11. Разнобой–2. 16 августа

1. Докажите, что у уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ нет решений помимо тех, что были построены во время решения задачи **7.1**.

2. Докажите, что уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$$

имеет решение в целых числах, больших 10^{10}.

3. Последовательность целых чисел назовём *любопытной*, если первые два ее элемента равны 1, а каждое следующее число равно либо сумме двух предыдущих, либо модулю их разности. Докажите, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b существует любопытная последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ и такое натуральное n, что $x_n = a$ и $x_{n+2021} = b$.

4. На доске написаны числа 3, 4, 5 и 6. Каждым ходом разрешается выбрать на доске два числа a и b и заменить их числами $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Можно ли такими операциями получить на доске хотя бы одно число, меньшее 1?

«Спектр», 9 класс *Байтик, август 2021*

11. Разнобой–2. 16 августа

1. Докажите, что у уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ нет решений помимо тех, что были построены во время решения задачи **7.1**.

2. Докажите, что уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$$

имеет решение в целых числах, больших 10^{10}.

3. Последовательность целых чисел назовём *любопытной*, если первые два ее элемента равны 1, а каждое следующее число равно либо сумме двух предыдущих, либо модулю их разности. Докажите, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b существует любопытная последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ и такое натуральное n, что $x_n = a$ и $x_{n+2021} = b$.

4. На доске написаны числа 3, 4, 5 и 6. Каждым ходом разрешается выбрать на доске два числа a и b и заменить их числами $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Можно ли такими операциями получить на доске хотя бы одно число, меньшее 1?