

12. Линейные комбинации. 17 августа

Определение. *Линейной комбинацией* векторов (чисел, точек и т.д.) v_1, v_2, \dots, v_k будем называть выражение вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k,$$

где α_i — некоторые числа, которые называются *коэффициентами*.

1. а) Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n найдётся такой набор действительных чисел b_1, b_2, \dots, b_k , что любая линейная комбинация a_i с рациональными коэффициентами единственным образом представляется в виде линейной комбинации b_1, b_2, \dots, b_k с рациональными коэффициентами.
- б) Сведите задачу про 101 корову к случаю рациональных чисел.

2. Имеется табло с несколькими лампочками, а также несколько переключателей, каждый из которых меняет на противоположное состояние нескольких лампочек. Докажите, что количество различных состояний лампочек, которые можно добиться, равняется степени двойки.

3. Имеется табло с лампочками, расположенными в виде квадрата 100×100 , а также 200 переключателей, которые могут менять состояние лампочек в некоторой строчке или в столбце. Сколько различных состояний лампочек можно добиться?

4. Имеется табло с лампочками, расположенными в виде квадрата 8×8 . Разрешается изменить состояние лампочек в любой строке, любом столбце, любой диагонали (в том числе неполной и даже состоящей из одной клетки) и любого квадрата 4×4 . Любое ли состояние можно добиться с помощью таких операций?

5. По кругу расставлено 32 лампочки. Изначально они выключены. За ход можно переключить 5 подряд идущих лампочек. За какое наименьшее число ходов можно сделать все лампочки включенными?

12. Линейные комбинации. 17 августа

Определение. *Линейной комбинацией* векторов (чисел, точек и т.д.) v_1, v_2, \dots, v_k будем называть выражение вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k,$$

где α_i — некоторые числа, которые называются *коэффициентами*.

1. а) Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n найдётся такой набор действительных чисел b_1, b_2, \dots, b_k , что любая линейная комбинация a_i с рациональными коэффициентами единственным образом представляется в виде линейной комбинации b_1, b_2, \dots, b_k с рациональными коэффициентами.
- б) Сведите задачу про 101 корову к случаю рациональных чисел.

2. Имеется табло с несколькими лампочками, а также несколько переключателей, каждый из которых меняет на противоположное состояние нескольких лампочек. Докажите, что количество различных состояний лампочек, которые можно добиться, равняется степени двойки.

3. Имеется табло с лампочками, расположенными в виде квадрата 100×100 , а также 200 переключателей, которые могут менять состояние лампочек в некоторой строчке или в столбце. Сколько различных состояний лампочек можно добиться?

4. Имеется табло с лампочками, расположенными в виде квадрата 8×8 . Разрешается изменить состояние лампочек в любой строке, любом столбце, любой диагонали (в том числе неполной и даже состоящей из одной клетки) и любого квадрата 4×4 . Любое ли состояние можно добиться с помощью таких операций?

5. По кругу расставлено 32 лампочки. Изначально они выключены. За ход можно переключить 5 подряд идущих лампочек. За какое наименьшее число ходов можно сделать все лампочки включенными?