13. Разнобой–3. 17 августа

1. Натуральное число k и целые числа x и y таковы, что

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy.$$

Докажите, что $k = 3$.

2. Дано натуральное число a и какой-нибудь многочлен $P(x, y)$ с натуральными коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел b, взаимно простых с a, для которых число $P(a, b)$ — составное.

3. Натуральные числа a, b и k таковы, что $a^2+b^2 = k(ab+1)$. Докажите, что k — точный квадрат.

4. На доске написаны три положительных числа. Разрешается стереть одно из них (скажем, z) и заменить на $1/(zx+zy)$, где x, y — два других числа на доске. Можно ли из набора 2, 3, 6 получить набор чисел 2, 3, 4?

«Спектр», 9 класс *Байтик, август 2021*

13. Разнобой–3. 17 августа

1. Натуральное число k и целые числа x и y таковы, что

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy.$$

Докажите, что $k = 3$.

2. Дано натуральное число a и какой-нибудь многочлен $P(x, y)$ с натуральными коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел b, взаимно простых с a, для которых число $P(a, b)$ — составное.

3. Натуральные числа a, b и k таковы, что $a^2+b^2 = k(ab+1)$. Докажите, что k — точный квадрат.

4. На доске написаны три положительных числа. Разрешается стереть одно из них (скажем, z) и заменить на $1/(zx+zy)$, где x, y — два других числа на доске. Можно ли из набора 2, 3, 6 получить набор чисел 2, 3, 4?