1. Разнобой для всех. 8 августа

1. Для десяти натуральных чисел посчитали все их попарные НОДы. Могут ли 45 полученных чисел равняться 1, 2, …, 45?

2. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?

3. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За ход одну из них можно двигать на соседнюю по стороне клетку (две фишки на одной клетке стоять не могут). Можно ли получить все возможные расположения фишек, причем каждое — ровно по одному разу?

4. Даны две бесконечные (в одну сторону) прогрессии: арифметическая $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и геометрическая $b_1, b_2, b_3, \ldots$, причем все числа, которые встречаются среди членов геометрической прогрессии, встречаются также и среди членов арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии — целое число.

5. Окружность, проходящая через ортоцентр остроугольного треугольника ABC и вершины A и C, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y. На стороне AC выбраны точки Z и T так, что $ZX = ZY$ и $ZA = TC$. Докажите, что $BT \perp XY$.

6. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата по линиям сетки на два прямоугольника один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем k это возможно?

7. На доске $n \times n$ поставлено несколько фишек так, что для каждой фишки все клетки, расположенные правее или ниже ее, тоже заняты фишками. Пусть в i-й сверху строке содержится a_i фишек, в j-м слева столбце — b_j фишек. Докажите, что наборы чисел

$$a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n \quad \text{и} \quad b_1 - 1, b_2 - 2, \ldots, b_n - n$$

совпадают.

«Спектр», 10 класс Регина, август 2022

1. Разнобой для всех. 8 августа

1. Для десяти натуральных чисел посчитали все их попарные НОДы. Могут ли 45 полученных чисел равняться 1, 2, …, 45?

2. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?

3. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За ход одну из них можно двигать на соседнюю по стороне клетку (две фишки на одной клетке стоять не могут). Можно ли получить все возможные расположения фишек, причем каждое — ровно по одному разу?

4. Даны две бесконечные (в одну сторону) прогрессии: арифметическая $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и геометрическая $b_1, b_2, b_3, \ldots$, причем все числа, которые встречаются среди членов геометрической прогрессии, встречаются также и среди членов арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии — целое число.

5. Окружность, проходящая через ортоцентр остроугольного треугольника ABC и вершины A и C, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y. На стороне AC выбраны точки Z и T так, что $ZX = ZY$ и $ZA = TC$. Докажите, что $BT \perp XY$.

6. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата по линиям сетки на два прямоугольника один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем k это возможно?

7. На доске $n \times n$ поставлено несколько фишек так, что для каждой фишки все клетки, расположенные правее или ниже ее, тоже заняты фишками. Пусть в i-й сверху строке содержится a_i фишек, в j-м слева столбце — b_j фишек. Докажите, что наборы чисел

$$a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n \quad \text{и} \quad b_1 - 1, b_2 - 2, \ldots, b_n - n$$

совпадают.