

2. Разнойой не для всех. 8 августа

1. Саша и Серёжа написали на доске по положительному числу, меньшему 1. Каждую минуту каждый из мальчиков сравнивает свое число с $\frac{1}{2}$ и, если оно меньше $\frac{1}{2}$, прибавляет к нему $\frac{1}{2}$, а иначе — возводит его в квадрат. Докажите, что если вначале числа мальчиков были различны, то будет момент, когда они сделают разные действия.

2. Различные простые числа p и q таковы, что при некотором натуральном $k > 2$ число $p^2 + kprq + q^2$ — точный квадрат. Докажите, что $(p - 2)(q - 2) \leq k + 2$.

3. В стране некоторые пары городов соединены односторонним автобусным или железнодорожным сообщением. Между двумя городами может быть и несколько рейсов, в частности — в разные стороны. Известно, что для любых двух городов A и B либо из A в B , либо из B в A можно добраться, используя только один вид транспорта. Докажите, что найдётся такой город X , что для любого другого города Y из X в Y можно добраться с использованием только одного вида транспорта (для разных Y эти виды могут быть разными).

4. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку. Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.

5. График кубического многочлена $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ высекает на прямой, параллельной оси абсцисс, два отрезка длины 1, а на прямой, параллельной прямой $y = x$, два отрезка, длина одного из которых равна $\sqrt{2}$. Чему может быть равна длина второго?

2. Разнойой не для всех. 8 августа

1. Саша и Серёжа написали на доске по положительному числу, меньшему 1. Каждую минуту каждый из мальчиков сравнивает свое число с $\frac{1}{2}$ и, если оно меньше $\frac{1}{2}$, прибавляет к нему $\frac{1}{2}$, а иначе — возводит его в квадрат. Докажите, что если вначале числа мальчиков были различны, то будет момент, когда они сделают разные действия.

2. Различные простые числа p и q таковы, что при некотором натуральном $k > 2$ число $p^2 + kprq + q^2$ — точный квадрат. Докажите, что $(p - 2)(q - 2) \leq k + 2$.

3. В стране некоторые пары городов соединены односторонним автобусным или железнодорожным сообщением. Между двумя городами может быть и несколько рейсов, в частности — в разные стороны. Известно, что для любых двух городов A и B либо из A в B , либо из B в A можно добраться, используя только один вид транспорта. Докажите, что найдётся такой город X , что для любого другого города Y из X в Y можно добраться с использованием только одного вида транспорта (для разных Y эти виды могут быть разными).

4. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку. Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.

5. График кубического многочлена $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ высекает на прямой, параллельной оси абсцисс, два отрезка длины 1, а на прямой, параллельной прямой $y = x$, два отрезка, длина одного из которых равна $\sqrt{2}$. Чему может быть равна длина второго?