## 4. Устойчивые паросочетания. 9 августа

**1.** Скажем, что неполное паросочетание *простое*, если неусточивые пары включают только мальчиков без пары. Для паросочетания $M$ обозначим $r_j$ количество мальчиков, которых девочка $j$ предпочитает своей паре в $M$. Пусть $M^*$ — простое паросочетание с наименьшей суммой $r_j$. Докажите, что оно устойчивое. *Почему есть хотя бы одно простое паросочетание?*

**2.** Пусть $n = m$ и у каждой из возможных $n^2$ пар имеется *коэффициент прекрасности* $a_{i,j}$, для всех разных. Каждый мальчик и каждая девочка хотят быть в паре с самым высоким коэффициентом прекрасности. Докажите, что в таком случае устойчивое паросочетание только одно.

**3.** Пусть $M$ и $N$ — какие-то устойчивые паросочетания. Докажите, что мальчики, которые в $M$ получили более предпочтительных девочек, чем в $N$, находятся в $M$ в парах с девочками, которые в $N$ получили более предпочтительных мальчиков чем в $M$.

**Алгоритм Гейла–Шепли (1962).**

1. Исходно все мальчики и девочки не находятся в парах.
2. Каждый мальчик делает предложение наиболее предпочтительной для него девушке, которая его ещё не отвергла (или сдаётся).
3. Каждая девочка оставляет наиболее предпочтительное предложение, а остальные отвергает.
4. Если не было ни одного отказа, то алгоритм останавливается, иначе — повторяются 2 и 3. В этот момент все девушки соглашаются на имеющиеся у них предложения.

**4.** Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли a) заканчивается не более чем за $nm$ проходов; b) строит устойчивое паросочетание.

**5.** a) Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку.
b) А каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.

**6.** Докажите, что множество мальчиков и девочек, которые окажутся в парах, одно и то же для всех устойчивых паросочетаний.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

«Спектр», 10 класс Регина, август 2022

4. Устойчивые паросочетания. 9 августа

**1.** Скажем, что неполное паросочетание *простое*, если неусточивые пары включают только мальчиков без пары. Для паросочетания $M$ обозначим $r_j$ количество мальчиков, которых девочка $j$ предпочитает своей паре в $M$. Пусть $M^*$ — простое паросочетание с наименьшей суммой $r_j$. Докажите, что оно устойчивое. *Почему есть хотя бы одно простое паросочетание?*

**2.** Пусть $n = m$ и у каждой из возможных $n^2$ пар имеется *коэффициент прекрасности* $a_{i,j}$, для всех разных. Каждый мальчик и каждая девочка хотят быть в паре с самым высоким коэффициентом прекрасности. Докажите, что в таком случае устойчивое паросочетание только одно.

**3.** Пусть $M$ и $N$ — какие-то устойчивые паросочетания. Докажите, что мальчики, которые в $M$ получили более предпочтительных девочек, чем в $N$, находятся в $M$ в парах с девочками, которые в $N$ получили более предпочтительных мальчиков чем в $M$.

**Алгоритм Гейла–Шепли (1962).**

1. Исходно все мальчики и девочки не находятся в парах.
2. Каждый мальчик делает предложение наиболее предпочтительной для него девушке, которая его ещё не отвергла (или сдаётся).
3. Каждая девочка оставляет наиболее предпочтительное предложение, а остальные отвергает.
4. Если не было ни одного отказа, то алгоритм останавливается, иначе — повторяются 2 и 3. В этот момент все девушки соглашаются на имеющиеся у них предложения.

**4.** Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли a) заканчивается не более чем за $nm$ проходов; b) строит устойчивое паросочетание.

**5.** a) Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку.
b) А каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.

**6.** Докажите, что множество мальчиков и девочек, которые окажутся в парах, одно и то же для всех устойчивых паросочетаний.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

**7.** Пусть $n = m$. Докажите, что не существует никакого паросочетания (даже неустойчивого) при котором каждый из мальчиков находится в паре с девочкой лучше, чем девочка, которую он получает по алгоритму Гейла–Шепли.

**8*.** Пусть $\mu$ — паросочетание построенное алгоритмом Гейла–Шепли, а $\nu$ — какое-то другое паросочетание (не обязательно устойчивое). Пусть $S$ — множество тех мальчиков, которые в $\nu$ получили более предпочтительную девочку, чем в $\mu$. Докажите, что если $S \neq \varnothing$, то найдётся пара $(m, w)$, нестабильная для $\nu$, причём $m \notin S$.

**9.** Пусть $\mu$ — паросочетание построенное алгоритмом Гейла–Шепли. Пусть некоторое множество мальчиков $S_0$ решили попытаться обмануть окружающих и подменили свои списки предпочтений. Докажите, что не существует устойчивого паросочетания, в котором каждый мальчик из $S_0$ получит более предпочтительную девочку, чем в $\mu$.

**10.** Приведите пример ситуации, когда девочке выгодно соврать, чтобы получить более предпочтительного мальчика.

**7.** Пусть $n = m$. Докажите, что не существует никакого паросочетания (даже неустойчивого) при котором каждый из мальчиков находится в паре с девочкой лучше, чем девочка, которую он получает по алгоритму Гейла–Шепли.

**8*.** Пусть $\mu$ — паросочетание построенное алгоритмом Гейла–Шепли, а $\nu$ — какое-то другое паросочетание (не обязательно устойчивое). Пусть $S$ — множество тех мальчиков, которые в $\nu$ получили более предпочтительную девочку, чем в $\mu$. Докажите, что если $S \neq \varnothing$, то найдётся пара $(m, w)$, нестабильная для $\nu$, причём $m \notin S$.

**9.** Пусть $\mu$ — паросочетание построенное алгоритмом Гейла–Шепли. Пусть некоторое множество мальчиков $S_0$ решили попытаться обмануть окружающих и подменили свои списки предпочтений. Докажите, что не существует устойчивого паросочетания, в котором каждый мальчик из $S_0$ получит более предпочтительную девочку, чем в $\mu$.

**10.** Приведите пример ситуации, когда девочке выгодно соврать, чтобы получить более предпочтительного мальчика.