6. Из сколь угодно большого бесконечное. 10 августа

Мысль. Если можно построить цепочку «вложенных» сколь угодно больших примеров, то можно построить и один бесконечный пример.

1. Докажите, что если вершины любого конечного подграфа графа на бесконечном чисел вершин можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то и все вершины можно так покрасить.

2. Из клетчатой плоскости вырезали некоторое (возможно, бесконечное) количество клеток. Докажите, что если любой конечный участок плоскости U можно покрыть непересекающимися доминошками, то и всю плоскость можно разбить на непересекающиеся доминошки.

3. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x(p-1)^x/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x. Верно ли, что существует некоторая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что начав с числа x, будет совершено не более $f(x)$ действий?

4. a) Докажите, что если для каждого n существует раскраска рёбер полного графа на n вершинах в 2 цвета, не содержащая одноцветного полного подграфа на 100 вершинах, то существует и раскраска рёбер бесконечного полного графа в 2 цвета с тем же свойством.
b) Докажите, что при любой раскраске рёбер бесконечного полного графа в 2 цвета, найдётся бесконечный одноцветный полный подграф.

5. Вершины полного графа K_n занумерованы числами 1, 2, $\ldots$, n, а ребра раскрашены в два цвета. Докажите, что при достаточно большом n найдется полный одноцветный подграф более чем на 100 вершинах, количество вершин у которого будет больше минимального номера его вершины.

«Спектр», 10 класс Регина, август 2022

6. Из сколь угодно большого бесконечное. 10 августа

Мысль. Если можно построить цепочку «вложенных» сколь угодно больших примеров, то можно построить и один бесконечный пример.

1. Докажите, что если вершины любого конечного подграфа графа на бесконечном чисел вершин можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то и все вершины можно так покрасить.

2. Из клетчатой плоскости вырезали некоторое (возможно, бесконечное) количество клеток. Докажите, что если любой конечный участок плоскости U можно покрыть непересекающимися доминошками, то и всю плоскость можно разбить на непересекающиеся доминошки.

3. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x(p-1)^x/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x. Верно ли, что существует некоторая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что начав с числа x, будет совершено не более $f(x)$ действий?

4. a) Докажите, что если для каждого n существует раскраска рёбер полного графа на n вершинах в 2 цвета, не содержащая одноцветного полного подграфа на 100 вершинах, то существует и раскраска рёбер бесконечного полного графа в 2 цвета с тем же свойством.
b) Докажите, что при любой раскраске рёбер бесконечного полного графа в 2 цвета, найдётся бесконечный одноцветный полный подграф.

5. Вершины полного графа K_n занумерованы числами 1, 2, $\ldots$, n, а ребра раскрашены в два цвета. Докажите, что при достаточно большом n найдется полный одноцветный подграф более чем на 100 вершинах, количество вершин у которого будет больше минимального номера его вершины.